Zastosowania wyznaczników

Mirosław Sobolewski

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW

7.wykład z algebry liniowej
Warszawa, listopad 2010

Twierdzenie

Niech $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Następujące warunki są równoważne:
(i) $\det A \neq 0$
(ii) wiersze macierzy A tworzą układ liniowo niezależny
(iii) kolumny A tworzą układ liniowo niezależny

Uwaga 1 Jeśli $w_1, \ldots, w_m$ sa wierszami macierzy $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, zaś $v_1, \ldots, v_m$ są wierszami macierzy B, która powstała z A poprzez elementarne operacje na wierszach, to:
(i) $lin(w_1, \ldots, w_m) = lin(v_1, \ldots, v_m)$
(ii) $w_1, \ldots, w_m$ są liniowo niezależne $\Leftrightarrow$ $v_1, \ldots, v_m$ sa liniowo niezależne.
Uwaga 2 Niezerowe wiersze macierzy w postaci schodkowej tworzą układ liniowo niezależny.

Przykład

Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Sprowadzamy do postaci schodkowej:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$$

$\det A = \det B = 0$. Wiersze macierzy A tworzą układ liniowo zależny, np. $(1,2,1) - (2,5,3) + (1,3,2) = 0$

Macierze odwrotne i odwracalne

Definicja

Macierz

$$\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \textit{nazywamy macierzą } \textit{jednostkową}$$

i oznaczamy I_n lub I(tzn. macierz I_n ma na przekątnej n jedynek, a poza przekątną – zera).

Uwaga. Dla dowolnej macierzy $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ mamy $I_nA = AI_n = A$. Macierz jednostkowa jest więc elementem neutralnym dla mnożenia macierzy. Np.

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Definicja

Mówimy, że macierz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ jest odwracalna jeśli istnieje taka macierz $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, że $AB = I_n$. Macierz B nazywamy wówczas macierzą odwrotną do A i oznaczamy A^{-1}

Przykład

1.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \text{ wówczas } A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\text{bo } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

2.
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}, \text{bo } \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} =$$
$$= I_3$$

Twierdzenie

Niech $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ oraz $\mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_n)$ będą bazami przestrzeni V. niech M będzie macierzą zamiany współrzędnych od $\mathcal{A}$ do $\mathcal{B}$ (tzn. $M = M(id)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$, zaś N macierzą zamiany współrzędnych od $\mathcal{B}$ do $\mathcal{A}$ (tzn $N = M(id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$). Wówczas $N = M^{-1}$

Istotnie, $MN = M(id)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} M(id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = M(id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = I$ (bo $id(w_1) = 1 \cdot w_1 + 0 \cdot w_2 + \cdots + 0 \cdot w_n, \ldots, id(w_n) = w_n = 0 \cdot w_1 + \cdots + 0 \cdot w_{n-1} + 1 \cdot w_n$)

Przykład

Niech $V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{A} = ((1,3),(2,7))$, zaś $\mathcal{B} = st = ((1,0),(0,1))$. Wtedy

$$M = M(id)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \text{ zaś } N = M(id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = M^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

(zobacz poprzedni slajd)

Związek wyznacznika z odwracalnością macierzy

Twierdzenie (1)

Niech $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. *Wtedy równoważne są:*
(i) A jest odwracalna
(ii) $\det A \neq 0$
(iii) Wiersze A tworzą układ liniowo niezależny
(iv) Kolumny A tworzą układ liniowo niezależny
(v) Nie istnieje niezerowa kolumna $K \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, *taka, że* $AK = \mathbf{0}$,
gdzie $\mathbf{0}$ *oznacza kolumnę zerową (czyli składającą się z n zer)*

Twierdzenie (2)

Jeśli A jest odwracalna to istnieje dokładnie jedna macierz $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *spełniająca* $AB = I$. *Ponadto*
dla $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *zachodzi* $AB = I \Leftrightarrow BA = I$

Metoda znajdowania macierzy odwrotnej

Wprowadzimy oznaczenie: dla macierzy $A = [a_{ij}], B = [b_{ij} \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$

$$A|B \text{ oznacza macierz } \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix} \in M_{n\times 2n}(\mathbb{R}).$$

Twierdzenie

macierz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ jest odwracalna $\Leftrightarrow$ macierz $A|I$ można sprowadzić elementarnymi operacjami na wierszach do postaci $I|B$. Wówczas $B = A^{-1}$

Przykład

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Mamy } A|I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} w_2 \leftrightarrow w_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} w_3 - w_1 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} w_3 + w_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} w_1 - w_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{zatem } A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Przypomnienie: Rząd macierzy

Definicja

Niech $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ Rzędem macierzy A nazywamy liczbę dimlin$(w_1, \ldots, w_m)$, gdzie $w_1, \ldots, w_m$ są wierszami A. Rząd A oznaczamy $r(A)$.

Przykład

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$ sprowadzamy Ado postaci schodkowej

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zatem

$lin((1,2,3,1),(3,5,7,2),(1,1,1,0)) = lin((1,2,3,1),(0,-1,-2,-1))$

Stąd $dim\ \ lin((1,2,3,1),(3,5,7,2),(1,1,1,0)) = 2$, $r(A) = 2$

Twierdzenie

dla każdej macierzy $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ *następujące liczby sa równe:*
(i) dim lin$(w_1, \ldots, w_m)$*, gdzie* $w_1, \ldots, w_m$ *są wierszami A*
(ii) dim lin$(k_1, \ldots, k_n)$*, gdzie* $k_1, \ldots, k_n$ *są kolumnami A*
(iii) rozmiar (liczba wierszy) maksymalnej podmacierzy kwadratowej B macierzy A takiej, że $\det B \neq 0$

Zastosowanie wyznacznika i rzędu macierzy w teorii równań liniowych

Niech

$$U : \begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \cdots & +a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \cdots & +a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & \cdots & +a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

Oznaczmy przez A macierz $m \times n$ współczynników U, zaś A_U macierz $m \times (n+1)$ układu U, tzn.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, A_U = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Twierdzenie (Kroneckera - Capelliego)

(i) Układ U ma rozwiązanie $\Leftrightarrow r(A) = r(A_U)$
(ii) Jeśli układ U ma rozwiązanie , to rozwiązanie ogólne ma $n - r(A)$ *parametrów*
(iii) Jeśli ciąg $k = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ *jest pewnym rozwiązaniem układu U oraz W jest przestrzenią rozwiązań układu jednorodnego z macierzą współczynników A, to* $k + W = \{k + w | w \in W\}$ *jest zbiorem rozwiązań układu U.*

Twierdzenie (Cramera)

Gdy $m = n$ *to (i) Układ U ma jednoznaczne rozwiązanie* $\Leftrightarrow \det A \neq 0$
(ii) Jeśli $(x_1, \ldots, x_n)$ *jest jedynym rozwiązaniem układu U, to* $(x_1, \ldots, x_n) = (\frac{\det D_1}{\det A}, \frac{\det D_2}{\det A}, \ldots, \frac{\det D_n}{\det A})$*, gdzie* D_j *oznacza macierz powstałą z A przez zastąpienie kolumny o numerze j kolumną, której kolejnymi elementami są* $b_1, b_2, \ldots, b_m$ *(kolumną wyrazów wolnych równań układu).*

Wzór na macierz odwrotną

Twierdzenie

Jeśli macierz kwadratowa $A = [a_{ij}], 1 \leq i, j \leq n$ *jest odwracalna, to macierzą odwrotną jest macierz* $A^{-1} = [b_{ij}], 1 \leq i, j \leq n$*, w której* $b_{ij} = \frac{1}{\det A}(-1)^{i+j} \det A_{ji}$

Przykład

W szczególności jeśli $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ jest odwracalna, tzn. $\det A = ad - bc \neq 0$, to $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$