Wyznaczniki

Mirosław Sobolewski

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW

6. Wykład z algebry liniowej
Warszawa, listopad 2018

Terminologia

Macierze $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ nazywamy kwadratowymi.
Oznaczenie: Niech $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Wówczas A_{ij} oznacza macierz powstałą z A przez usunięcie i-tego wiersza i j-tej kolumny. Zatem $A_{ij} \in M_{(n-1)\times(n-1)}(\mathbb{R})$.

Przykład

Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 4 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ wówczas } A_{23} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Definicja

Wyznacznikiem nazywamy funkcję przyporządkowującą każdej macierzy kwadratowej A o wyrazach z $\mathbb{R}$ pewną liczbę rzeczywistą oznaczaną $\det A$ *i spełniającą:*
(i) Jeśli $A = [a]$ *to* $\det A = a$
(ii) Jeśli

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ gdzie } n > 1, \text{ to } \det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j}$$

.

Przykład

$n = 2$,

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} a_{22} + (-1)^{1+2} a_{12} a_{21} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

np.

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = 3 - 8 = -5$$

Przykład

podobnie dla $n = 3$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} +$$

$$(-1)^{1+2} a_{12} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} =$$

$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$.

Np.:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} = 5 + 24 = 29$$

(Schemat Sarrusa na tablicy)

Własności wyznaczników

Twierdzenie (1)

Niech $A, B, C \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.
(a) Niech $k \leq n, k \geq 1$. *Jeśli macierze* A, B, C *mają wszystkie wiersze (kolumny), za wyjątkiem wiersza (kolumny) z numerem* k *równe, natomiast wiersz (kolumna) z numerem* k *macierzy* C *jest sumą odpowiednich wierszy (kolumn) z numerem* k *macierzy* A *i* B *to* $\det C = \det A + \det B$.

Własności wyznaczników

Twierdzenie (1)

Niech $A, B, C \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.
(a) Niech $k \leq n, k \geq 1$. Jeśli macierze A, B, C mają wszystkie wiersze (kolumny), za wyjątkiem wiersza (kolumny) z numerem k równe, natomiast wiersz (kolumna) z numerem k macierzy C jest sumą odpowiednich wierszy (kolumn) z numerem k macierzy A i B to $\det C = \det A + \det B$.
(b) Jeśli B powstała z A poprzez zamianę dwóch wierszy (kolumn) to $\det B = -\det A$.

Własności wyznaczników

Twierdzenie (1)

Niech $A, B, C \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$*.*
(a) Niech $k \leq n, k \geq 1$*. Jeśli macierze* A, B, C *mają wszystkie wiersze (kolumny), za wyjątkiem wiersza (kolumny) z numerem* k *równe, natomiast wiersz (kolumna) z numerem* k *macierzy* C *jest sumą odpowiednich wierszy (kolumn) z numerem* k *macierzy* A *i* B *to* $\det C = \det A + \det B$*.*
(b) Jeśli B *powstała z* A *poprzez zamianę dwóch wierszy (kolumn) to* $\det B = -\det A$*.*
(c) Jeśli B *powstała z* A *poprzez pomnożenie jednego z wierszy (jednej z kolumn)* A *przez liczbę* c *to* $\det B = c \det A$

Przykład

(a):

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ (1+2) & (1+0) & (4+1) \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Przykład

(a):

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ (1+2) & (1+0) & (4+1) \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Przykład

(a):

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ (1+2) & (1+0) & (4+1) \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = -\det\begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

(c)

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = 2\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Definicja

Niech $A = [a_{ij}] = \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$*. Macierz* $B = [b_{ij}] \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$*, spełniającą dla każdej pary indeksów* i, j *równość* $b_{ij} = a_{ji}$ *nazywamy macierzą* ***transponowaną*** *do* A *i oznaczamy przez* $A^\top$

Definicja

Niech $A = [a_{ij}] =\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$*. Macierz* $B = [b_{ij}] \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$*, spełniającą dla każdej pary indeksów* i, j *równość* $b_{ij} = a_{ji}$ *nazywamy macierzą* ***transponowaną*** *do A i oznaczamy przez* $A^\top$

Przykład

Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix} \text{ wtedy } A^\top = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Definicja

Niech $A = [a_{ij}] = \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. *Macierz* $B = [b_{ij}] \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, *spełniającą dla każdej pary indeksów* i, j *równość* $b_{ij} = a_{ji}$ *nazywamy macierzą* *transponowaną* *do* A *i oznaczamy przez* $A^\top$

Przykład

Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix} \text{ wtedy } A^\top = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Twierdzenie

Dla każdej macierzy $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *zachodzi* $\det A^\top = \det A$

Definicja

Niech $A = [a_{ij}] =\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. *Macierz* $B = [b_{ij}] \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, *spełniającą dla każdej pary indeksów* i, j *równość* $b_{ij} = a_{ji}$ *nazywamy macierzą* ***transponowaną*** *do* A *i oznaczamy przez* $A^\top$

Przykład

Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix} \text{ wtedy } A^\top = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Twierdzenie

Dla każdej macierzy $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *zachodzi* $\det A^\top = \det A$

Przykład

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^\top = \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Twierdzenie (Rozwinięcie Laplace'a względem wiersza lub kolumny)

Twierdzenie (Rozwinięcie Laplace'a względem wiersza lub kolumny)

Dla każdej macierzy $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ mamy :Jeśli

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \textit{ gdzie } n > 1, \textit{ to}$$

$\det A = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det A_{ij} = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ji}\det A_{ji}$, *dla* $1 \leq i \leq n$.

Twierdzenie (Rozwinięcie Laplace'a względem wiersza lub kolumny)

Dla każdej macierzy $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ mamy :Jeśli

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ gdzie } n > 1, \text{ to}$$

$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ji} \det A_{ji}$, *dla* $1 \leq i \leq n$.

Przykład

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 4 & 7 & 9 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} = (-1)^{3+4} 3 \det \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} =$$

$$-3 \cdot (-1)^{1+2} 2 \det \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = 6 \cdot (-10) = -60$$

Twierdzenie (Cauchy'ego o mnożeniu wyznaczników)

Dla dowolnych macierzy $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *mamy* $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

Twierdzenie (Cauchy'ego o mnożeniu wyznaczników)

Dla dowolnych macierzy $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *mamy* $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

Wnioski

1. Jeśli macierz A ma wiersz (lub kolumnę) zerowy to $\det A = 0$.

Twierdzenie (Cauchy'ego o mnożeniu wyznaczników)

Dla dowolnych macierzy $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *mamy* $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

Wnioski

1. Jeśli macierz A ma wiersz (lub kolumnę) zerowy to $\det A = 0$.
2. Jeśli w macierzy A dwa wiersze (dwie kolumny) są identyczne to $\det A = 0$

Twierdzenie (Cauchy'ego o mnożeniu wyznaczników)

Dla dowolnych macierzy $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *mamy* $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

Wnioski

1. Jeśli macierz A ma wiersz (lub kolumnę) zerowy to $\det A = 0$.
2. Jeśli w macierzy A dwa wiersze (dwie kolumny) są identyczne to $\det A = 0$
3.

a) Operacje elementarne typu 1 (dodanie do wiersza innego wiersza pomnożonego przez liczbę, analogicznie dla kolumn) nie zmieniają wyznacznika macierzy.

Twierdzenie (Cauchy'ego o mnożeniu wyznaczników)

Dla dowolnych macierzy $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *mamy* $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

Wnioski

1. Jeśli macierz A ma wiersz (lub kolumnę) zerowy to $\det A = 0$.
2. Jeśli w macierzy A dwa wiersze (dwie kolumny) są identyczne to $\det A = 0$
3.

a) Operacje elementarne typu 1 (dodanie do wiersza innego wiersza pomnożonego przez liczbę, analogicznie dla kolumn) nie zmieniają wyznacznika macierzy.

b) Operacje elementarne typu 2 (zamiana dwu wierszy bądź kolumn) zmieniają wyznacznik na przeciwny.

Twierdzenie (Cauchy'ego o mnożeniu wyznaczników)

Dla dowolnych macierzy $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *mamy* $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

Wnioski

1. Jeśli macierz A ma wiersz (lub kolumnę) zerowy to $\det A = 0$.
2. Jeśli w macierzy A dwa wiersze (dwie kolumny) są identyczne to $\det A = 0$
3.

a) Operacje elementarne typu 1 (dodanie do wiersza innego wiersza pomnożonego przez liczbę, analogicznie dla kolumn) nie zmieniają wyznacznika macierzy.
b) Operacje elementarne typu 2 (zamiana dwu wierszy bądź kolumn) zmieniają wyznacznik na przeciwny.
c) Operacje elementarne typu 3, tzn. pomnożenie wiersza bądź kolumny przez liczbę c skutkują pomnożeniem wyznacznika przez c.

Jak obliczać wyznaczniki?

Definicja

Macierz $A = [a_{ij}] \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *nazywamy macierzą trójkątną (dokładniej: górnie trójkątną), jeśli* $a_{ij} = 0$ *dla każdej pary indeksów* i, j*, takich, że* $i > j$ *(*$i, j \in \{1, \ldots, n\}$*)*

Jak obliczać wyznaczniki?

Definicja

Macierz $A = [a_{ij}] \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ nazywamy macierzą trójkątną (dokładniej: górnie trójkątną), jeśli $a_{ij} = 0$ dla każdej pary indeksów i, j, takich, że $i > j$ ($i, j \in \{1, \ldots, n\}$)

Przykład

Macierz

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

jest (górnie) trójkątna.

Uwaga: macierz kwadratowa w postaci schodkowej jest trójkątna.

Twierdzenie

(i) Jeśli $A = [a_{ij}] \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *jest trójkątna to* $\det A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$.
(ii) Jeśli macierz kwadratowa B powstała z macierzy kwadratowej A przez zastosowanie operacji elementarnych 1 i 2 typu (wierszowych bądź kolumnowych) to $\det A = (-1)^s \det B$*, gdzie s oznacza liczbę przeprowadzonych operacji 2 typu (tzn. zamiany wierszy bądź kolumn)*

Twierdzenie

(i) Jeśli $A = [a_{ij}] \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *jest trójkątna to* $\det A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$.
(ii) Jeśli macierz kwadratowa B powstała z macierzy kwadratowej A przez zastosowanie operacji elementarnych 1 i 2 typu (wierszowych bądź kolumnowych) to $\det A = (-1)^s \det B$, *gdzie s oznacza liczbę przeprowadzonych operacji 2 typu (tzn. zamiany wierszy bądź kolumn)*

Metoda obliczania wyznacznika. Sprowadzamy macierz operacjami 1 i 2 rodzaju do postaci trójkątnej po czym korzystamy z powyższego twierdzenia. (Przykłady na tablicy)

Wniosek

Układ wektorów $w_1, \dots, w_n \in \mathbb{R}^n$ *jest liniowo zależny* $\Leftrightarrow$ *macierz* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, *której wierszami są wektory* $w_1, \dots, w_n$ *spełnia* $\det A = 0$

Twierdzenie

Niech macierz M ma postać blokową $\begin{bmatrix} A & B \\ \mathbf{0} & C \end{bmatrix}$*, gdzie A i C oznaczają podmacierze kwadratowe M, zaś* $\mathbf{0}$ *prostokątny blok złożony z samych* 0*. Wtedy* $\det M = \det A \cdot \det C$

Twierdzenie

Niech macierz M ma postać blokową $\begin{bmatrix} A & B \\ \mathbf{0} & C \end{bmatrix}$, *gdzie A i C oznaczają podmacierze kwadratowe M, zaś $\mathbf{0}$ prostokątny blok złożony z samych 0. Wtedy* $\det M = \det A \cdot \det C$

Przykład

Niech $M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 25 & 73 \\ 5 & 0 & 1 & 11 & 97 \\ 3 & 4 & 0 & 17 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. Macierz M ma strukturę blokową jak w powyższym twierdzeniu. Mamy 3×3 blok $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ oraz 2×2 blok $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Zatem

$\det M = \det A \cdot \det C = (5 \cdot 4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 3 - 4 \cdot 1 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 3) = 126$

Uwaga.

Uwaga.

Na płaszczyźnie wyznacznik ma następującą interpretację geometryczną: pole równoległoboku rozpiętego na wektorach $(a, b), (c, d)$ jest równe wartości bezwzględnej

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Uwaga.

Na płaszczyźnie wyznacznik ma następującą interpretację geometryczną: pole równoległoboku rozpiętego na wektorach $(a, b), (c, d)$ jest równe wartości bezwzględnej

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Podobnie objętość równoległościanu rozpiętego na wektorach $(a, b, c), (d, e, f), (g, h, i) \in \mathbb{R}^3$ jest równa $|\det A|$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$