Programowanie liniowe – metoda sympleks

Mirosław Sobolewski

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW

13. wykład z algebry liniowej
Warszawa, styczeń 2018

Metoda sympleks

Twórca– George Dantzig, USA 1947 rok
Cel: rozwiązywanie zadania programowania liniowego określonego w postaci standardowej

$f(x_1, \dots, x_n) = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \to min$ (f – funkcja celu)
przy warunkach

$$U : \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_{m1} + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}, x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, \text{ gdzie } b_i \geq 0$$

dla $i = 1, \dots, m$. W skrócie :

$$\text{Min}\{c^\top \cdot x : Ax = b, x \geq 0\}, \text{ gdzie } A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$ Zakładamy, że $r(A) = m$.

Schemat przeszukiwania: Zaczynając od pewnego rozwiązania bazowego dopuszczalnego, przechodzimy kolejno do innych rozwiązań rozwiązań bazowych dopuszczalnych, w każdym kroku zastępując jeden element zbioru bazowego innym, dopóki da się pomniejszać wartość funkcji celu f.

Interpretacja geometryczna: Rozwiązania bazowe dopuszczalne = wierzchołki zbioru dopuszczalnego X.
Wymiana jednego elementu w zbiorze bazowym = przejście do sąsiedniego (tzn. połączonego krawędzią) wierzchołka X. Wędrówkę po wierzchołkach kończymy w wierzchołku ”najniższym” w sensie funkcji celu f.

Przykład (**Szczegóły metody sympleks**)

Szukamy największej wartości funkcji
$g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 16x_1 + 10x_2 + x_3$, przy ograniczeniach :
$x_1 + x_3 = 2$
$x_2 + x_4 = 3$
$x_1 + x_2 + x_5 = 4$
$x_1 \geq 0, \ldots, x_5 \geq 0$
Sprowadzamy problem do postaci standardowej zastępując maksymalizację funkcji g minimalizacją funkcji $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = -16x_1 - 10x_2 - x_3$. Inaczej można to zadanie zapisać w postaci $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = -16x_1 - 10x_2 - x_3 \rightarrow min$ przy

$$Ax = b, x \geq \mathbf{0}, \text{ gdzie } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Przykład (cd)

Utworzymy następującą tablicę, składającą z macierzy bazowego układu równań zadania programowania liniowego, rozszerzonej o wiersz nazwany wierszem funkcji celu reprezentujący równanie $z = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \Leftrightarrow z - f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 0$ gdzie z jest pewną dodatkową zmienną i pewne pomocnicze kolumny tzw . kolumnę ilorazów, która pozwoli nam podjąć decyzję usunięcia zmiennej z układu bazowego i kolumnę reprezentującą wybór zmiennych układu bazowego. Oczywiście najprościej wybrać jako zmienne bazowe x_3, x_4, x_5. Początkowym wektorem bazowym dopuszczalnym jest $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 2, 3, 4)$

Zmienna bazowa	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	Iloraz
x_3	0	1	0	1	0	0	2	*
x_4	0	0	1	0	1	0	3	*
x_5	0	1	1	0	0	1	4	*
wiersz f	1	16	10	1	0	0	0	nic

Przykład (cd)

Poprawimy tablicę do tzw. postaci sympleksowej, w której w kolumnach zmiennych bazowych stoją wektory jednostkowe. W tym celu odejmiemy od w_f wiersz pierwszy. Teraz, w kolumnie stałych b w w_f stoi wartość f w punkcie bazowym $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 2, 3, 4)$, czyli -2

Zmienna bazowa	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	Iloraz
x_3	0	1	0	1	0	0	2	*
x_4	0	0	1	0	1	0	3	*
x_5	0	1	1	0	0	1	4	*
wiersz f	1	15	10	0	0	0	-2	nic

Przykład

W wierszu f (funkcji celu) występują rubrykach zmiennych x_1, x_2 wyrazy dodatnie. Oznacza to, że można poprawić (zmniejszyć) funkcję celu przechodząc do nowego wektora bazowego dopuszczalnego. Jako nową zmienną bazową wybieramy x_1, kierując się tym, że w jej rubryce w wierszu f stoi największa liczba.

Przykład

W wierszu f (funkcji celu) występują rubrykach zmiennych x_1, x_2 wyrazy dodatnie. Oznacza to, że można poprawić (zmniejszyć) funkcję celu przechodząc do nowego wektora bazowego dopuszczalnego. Jako nową zmienną bazową wybieramy x_1, kierując się tym, że w jej rubryce w wierszu f stoi największa liczba.

Musimy również wybrać spośród zmiennych x_3, x_4, x_5, tę, która opuści zbiór zmiennych bazowych. W tym celu obliczamy ilorazy wyrazów stałych z kolumny b przez odpowiadające im elementy w kolumnie nowej zmiennej bazowej x_1 – o ile elementy te są dodatnie

Przykład

W wierszu f (funkcji celu) występują rubrykach zmiennych x_1, x_2 wyrazy dodatnie. Oznacza to, że można poprawić (zmniejszyć) funkcję celu przechodząc do nowego wektora bazowego dopuszczalnego. Jako nową zmienną bazową wybieramy x_1, kierując się tym, że w jej rubryce w wierszu f stoi największa liczba.

Musimy również wybrać spośród zmiennych x_3, x_4, x_5, tę, która opuści zbiór zmiennych bazowych. W tym celu obliczamy ilorazy wyrazów stałych z kolumny b przez odpowiadające im elementy w kolumnie nowej zmiennej bazowej x_1 – o ile elementy te są dodatnie

(jeśliby takich elementów nie było, oznaczałoby to, że f nie jest ograniczona z dołu na X) Następnie będziemy dodawać do innych wierszy wielokrotności wiersza, w którym stoi 1 kolumny opuszczającej zbiór bazowy, tak, by w kolumnie nowej zmiennej bazowej stał tylko jeden element $\neq 0$. Jeśli element ten jest $\neq 1$ należy podzielić wiersz przez ten element.

Przykład

Zmienna bazowa	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	Iloraz
$\underline{x_3}$	0	1	0	1	0	0	2	2/1=2
x_4	0	0	1	0	1	0	3	nd
x_5	0	1	1	0	0	1	4	4/1=4
wiersz f	1	15	10	0	0	0	-2	nic

Przykład

Zmienna bazowa	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	Iloraz
$\underline{x_3}$	0	1	0	1	0	0	2	2/1=2
x_4	0	0	1	0	1	0	3	nd
x_5	0	1	1	0	0	1	4	4/1=4
wiersz f	1	15	10	0	0	0	-2	nic

Najmniejszy z ilorazów $= 2$, w jego wierszu (w_1) jest 1 kolumny zmiennej bazowej x_3– opuszcza ona zmienne bazowe.

Przykład

Zmienna bazowa	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	Iloraz
$\underline{x_3}$	0	1	0	1	0	0	2	2/1=2
x_4	0	0	1	0	1	0	3	nd
x_5	0	1	1	0	0	1	4	4/1=4
wiersz f	1	15	10	0	0	0	-2	nic

Najmniejszy z ilorazów $= 2$, w jego wierszu (w_1) jest 1 kolumny zmiennej bazowej x_3– opuszcza ona zmienne bazowe.Operacjami : $w_3 - w_1$, $w_f - 15w_1$ budujemy nową tabelę – względem x_1, x_4, x_5.

Zmienna bazowa	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	Iloraz
x_1	0	1	0	1	0	0	2	*
x_4	0	0	1	0	1	0	3	*
x_5	0	0	1	-1	0	1	2	*
wiersz f	1	0	10	-15	0	0	-32	nic

Nowa tabela sympleksowa

Przykład

Nowym punktem bazowym dopuszczalnym jest $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2, 0, 0, 3, 2)$, wartość f odczytujemy w w_f, rubryce b: mamy $z = -32$. Znów w wierszu funkcji celu zauważamy element dodatni – 10 w rubryce x_2. Zatem można poprawić wartość f. Nową zmienna bazową jest x_2, zmienną opuszczającą zmienne bazowe wyznacza test ilorazów:

Zmienna bazowa	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	Iloraz
x_1	0	1	0	1	0	0	2	nd
x_4	0	0	1	0	1	0	3	3/1=3
$\underline{x_5}$	0	0	1	-1	0	1	2	2/1=2
wiersz f	1	0	10	-15	0	0	-32	nic

Jest nią x_5 Przy pomocy operacji $w_2 - w_3, w_f - 10w_3$ tworzymy następną tabelę sympleks:

Trzecia tabela sympleksowa

Przykład

Zmienna bazowa	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	Iloraz
x_1	0	1	0	1	0	0	2	*
x_4	0	0	0	1	1	-1	1	*
x_2	0	0	1	-1	0	1	2	*
wiersz f	1	0	0	-5	0	-10	-52	nic

Tym razem w wierszu f w rubrykach zmiennych $x_1, \ldots, x_5$ nie ma dodatnich elementów – tzn. jesteśmy w minimum=-52. Znaleziony wektor bazowy dopuszczalny to $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2, 2, 0, 1, 0)$. Zatem rozwiązanie pierwotnego problemu to $\max(g) = 52$.

Znajdowanie początkowego wektora bazowego dopuszczalnego

Mamy zbiór X opisany standardowo przez $Ax = b, x = [x_1, \ldots, x_n]^\top \geq \mathbf{0}$, gdzie $A \in M_{m\times n}, b \in M_{m\times 1}, b \geq \mathbf{0}$. Jak stwierdzić, że X jest niepusty, i jeśli tak jest jak znaleźć wektor bazowy dopuszczalny?

Stosuje się tzw. metodę sztucznej bazy, wprowadzając dodatkowe zmienne, $y_1, \ldots, y_m$, macierz współczynników A przedłużając o macierz jednostkową I_m. Tzn. macierz układu dla $n + m$ zmiennych ma teraz postać $[A|I_m|b] \in M_{m\times(n+m+1)}(\mathbb{R})$, z macierzą współczynników $A' = [A|I_m] \in M_{m\times(n+m)}$ oraz $x' = [x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]^\top$,i rozwiązujemy problem $y_1 + \cdots + y_n \to min$ przy warunkach $A'x' = b, x' \geq \mathbf{0}$.
Ten problem ma zawsze rozwiązanie.
Jeśli osiągamy $min = 0$ to $X \neq \emptyset$, w przeciwnym wypadku, tzn. $min > 0$ mamy $X = \emptyset$.

Przykład

Zbiór $X \subset \mathbb{R}^4$ opisany jest przez:

$8x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 4$

$3x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 1$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

Wprowadzamy sztuczne zmienne y_1, y_2 i funkcję celu

$f(x_1, \ldots, x_4, y_1, y_2) = y_1 + y_2 \to min$ przy warunkach

$8x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 + y_1 = 4$

$3x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + y_2 = 1$

$z - f(x_1, \ldots, x_4, y_1, y_2) = z - y_1 - y_2 = 0$

$x_1, \ldots, x_4 \geq 0, y_1, y_2 \geq 0$

Zmienna bazowa	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	b	Iloraz
y_1	0	8	3	-5	1	1	0	4	*
y_2	0	3	1	-2	-1	0	1	1	*
wiersz f	1	0	0	0	0	-1	-1	0	nic

Po operacji $w_f + w_1 + w_2$ otrzymujemy tablicę sympleks

Przykład (tablica sympleks)

Zmienna bazowa	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	b	Iloraz
y_1	0	8	3	-5	1	1	0	4	4/3
$\underline{y_2}$	0	3	1	-2	-1	0	1	1	1/1
wiersz f	1	11	4	-7	0	0	0	5	nic

Jako nową zmienną bazową wybieramy x_2, usuwamy y_2. Po operacjach $w_1 - 3w_2, w_f - 4w_2$ mamy nową tablicę sympleks

Zmienna bazowa	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	b	Iloraz
$\underline{y_1}$	0	-1	0	1	4	1	-3	1	1/1
x_2	0	3	1	-2	-1	0	1	1	nd
wiersz f	1	-1	0	1	4	0	-4	1	nic

Wprowadzamy x_3 usuwamy y_1. Po operacjach $w_2 + 2w_1$, $w_f - w_1$ otrzymujemy:

Przykład (ostateczna tabela sympleks)

Zmienna bazowa	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	b	Iloraz
x_3	0	-1	0	1	4	1	-3	1	*
x_2	0	1	1	0	7	2	-5	3	*
wiersz f	1	0	0	0	0	-1	-1	0	nic

Otrzymaliśmy $\min f = 0$, zatem mamy niepusty X i należy do niego dopuszczalny punkt bazowy $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 3, 1, 0)$.