Przekształcenia liniowe

Mirosław Sobolewski

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW

4. wykład z algebry liniowej
Warszawa, październik 2018

Definicja

Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi. Powiemy, że funkcja $f : V \to W$ jest *przekształceniem liniowym* *jeśli spełnione są warunki:*
(i) $f(v+u) = f(v) + f(u)$ *dla* $v, u \in V$,
(ii) $f(\alpha v) = \alpha f(v)$ *dla* $\alpha \in \mathbb{R}$ *oraz* $v \in V$.

Definicja

Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi. Powiemy, że funkcja $f : V \to W$ jest przekształceniem liniowym *jeśli spełnione są warunki:*
(i) $f(v+u) = f(v) + f(u)$ dla $v, u \in V$,
(ii) $f(\alpha v) = \alpha f(v)$ dla $\alpha \in \mathbb{R}$ oraz $v \in V$.

Przykłady Przekształcenie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ opisane wzorem $f((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 - 3x_3, x_1 + x_2 + x_3)$ jest liniowe,

Definicja

Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi. Powiemy, że funkcja $f : V \to W$ jest *przekształceniem liniowym* *jeśli spełnione są warunki:*
(i) $f(v+u) = f(v) + f(u)$ dla $v, u \in V$,
(ii) $f(\alpha v) = \alpha f(v)$ dla $\alpha \in \mathbb{R}$ oraz $v \in V$.

Przykłady Przekształcenie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ opisane wzorem $f((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 - 3x_3, x_1 + x_2 + x_3)$ jest liniowe,ogólnie:

Twierdzenie

Każde przekształcenie liniowe $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ma postać $f((x_1, \dots, x_n)) = (a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n, \dots, a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n)$ dla pewnych $a_{ij} \in \mathbb{R}$, gdzie $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$.

(Dowód)

Definicja

Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi. Powiemy, że funkcja $f: V \to W$ jest **przekształceniem liniowym** *jeśli spełnione są warunki:*
(i) $f(v+u) = f(v) + f(u)$ dla $v, u \in V$,
(ii) $f(\alpha v) = \alpha f(v)$ dla $\alpha \in \mathbb{R}$ oraz $v \in V$.

Przykłady Przekształcenie $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ opisane wzorem $f((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 - 3x_3, x_1 + x_2 + x_3)$ jest liniowe,ogólnie:

Twierdzenie

Każde przekształcenie liniowe $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ma postać $f((x_1, \dots, x_n)) = (a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n, \dots, a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n)$ dla pewnych $a_{ij} \in \mathbb{R}$, gdzie $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

(Dowód)Jeśli oznaczymy $f(\varepsilon_i) = (a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{mi})$ dla $i = 1, \dots, n$, to z linowości f mamy $f((x_1, x_2, \dots, x_n)) = f(x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \dots + x_n\varepsilon_n) =$
$x_1 f(\varepsilon_1) + x_2 f(\varepsilon_2) + x_n f(\varepsilon_n) =$
$x_1(a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}) + x_2(a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2}) + \dots + x_n(a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn}) =$
$(a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n, \dots, a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n)$

2. $\phi : \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ zdefiniowane przez $\phi(f) = f(1)$ jest liniowe,

2. $\phi : \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ zdefiniowane przez $\phi(f) = f(1)$ jest liniowe,
3. $\phi : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, gdzie $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ oznacza funkcje różniczkowalne, zdefiniowane $\phi(f) = f'$ jest liniowe.

Własności przekształceń liniowych

Niech $f : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Wówczas:

1. $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$

Własności przekształceń liniowych

Niech $f : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Wówczas:
1. $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$

2. Jeśli układ $v_1, \ldots, v_k$ jest liniowo zależny w V to układ $f(v_1), \ldots, f(v_k)$ jest liniowo zależny w W (układ liniowo niezależny **nie musi** przechodzić na układ liniowo niezależny.)

Własności przekształceń liniowych

Niech $f : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Wówczas:
1. $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$

2. Jeśli układ $v_1, \ldots, v_k$ jest liniowo zależny w V to układ $f(v_1), \ldots, f(v_k)$ jest liniowo zależny w W (układ liniowo niezależny **nie musi** przechodzić na układ liniowo niezależny.)

3. Zbiór $f(V) = \{f(v) : v \in V\} \subset W$ jest podprzestrzenią W (zwaną obrazem f), oraz jeśli układ $v_1, \ldots, v_k$ rozpina V to układ $f(v_1), \ldots, f(v_k)$ rozpina $f(V)$.

Własności przekształceń liniowych

Niech $f : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Wówczas:
1. $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$

2. Jeśli układ $v_1, \ldots, v_k$ jest liniowo zależny w V to układ $f(v_1), \ldots, f(v_k)$ jest liniowo zależny w W (układ liniowo niezależny **nie musi** przechodzić na układ liniowo niezależny.)

3. Zbiór $f(V) = \{f(v) : v \in V\} \subset W$ jest podprzestrzenią W (zwaną obrazem f), oraz jeśli układ $v_1, \ldots, v_k$ rozpina V to układ $f(v_1), \ldots, f(v_k)$ rozpina $f(V)$.

4. Przekształcenie f jest różnowartościowe tylko wtedy, kiedy $\{v \in V : f(v) = \mathbf{0}\} = \{\mathbf{0}\}$

Własności przekształceń liniowych

Niech $f : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym. Wówczas:
1. $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$

2. Jeśli układ $v_1, \dots, v_k$ jest liniowo zależny w V to układ $f(v_1), \dots, f(v_k)$ jest liniowo zależny w W (układ liniowo niezależny **nie musi** przechodzić na układ liniowo niezależny.)

3. Zbiór $f(V) = \{f(v) : v \in V\} \subset W$ jest podprzestrzenią W (zwaną obrazem f), oraz jeśli układ $v_1, \dots, v_k$ rozpina V to układ $f(v_1), \dots, f(v_k)$ rozpina $f(V)$.

4. Przekształcenie f jest różnowartościowe tylko wtedy, kiedy $\{v \in V : f(v) = \mathbf{0}\} = \{\mathbf{0}\}$

5.Jeśli f jest **różnowartościowe** i układ $v_1, \dots, v_k$ jest liniowo niezależny to również układ $f(v_1), \dots, f(v_k)$ jest liniowo niezależny.

Twierdzenie

Jeśli wektory $v_1, \ldots, v_n$ *tworzą bazę przestrzeni* V*, zaś wektory* $w_1, \ldots, w_n$ *stanowią dowolny układ* n *wektorów przestrzeni* W *to istnieje dokładnie jedno przekształcenie liniowe* $f : V \to W$ *spełniające równości* $f(v_i) = w_i$ *dla* $i = 1, \ldots, n$*.*

Twierdzenie

Jeśli wektory $v_1, \ldots, v_n$ tworzą bazę przestrzeni V, zaś wektory $w_1, \ldots, w_n$ stanowią dowolny układ n wektorów przestrzeni W to istnieje dokładnie jedno przekształcenie liniowe $f : V \to W$ spełniające równości $f(v_i) = w_i$ dla $i = 1, \ldots, n$.

Dowód Jeśli $\varphi : V \to W$ jest liniowe, to dla dowolnej kombinacji liniowej $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ mamy $\phi(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(v_i)$ (*).

Twierdzenie

Jeśli wektory $v_1, \ldots, v_n$ tworzą bazę przestrzeni V, zaś wektory $w_1, \ldots, w_n$ stanowią dowolny układ n wektorów przestrzeni W to istnieje dokładnie jedno przekształcenie liniowe $f : V \to W$ spełniające równości $f(v_i) = w_i$ dla $i = 1, \ldots, n$.

Dowód Jeśli $\varphi : V \to W$ jest liniowe, to dla dowolnej kombinacji liniowej $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ mamy $\phi(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(v_i)$ (*). Każdy wektor $v \in V$ jest taką kombinacją, stąd φ jest jednoznacznie określone przez wartości $\phi(v_i)$ na wektorach bazy.

Twierdzenie

Jeśli wektory $v_1, \ldots, v_n$ tworzą bazę przestrzeni V, zaś wektory $w_1, \ldots, w_n$ stanowią dowolny układ n wektorów przestrzeni W to istnieje dokładnie jedno przekształcenie liniowe $f : V \to W$ spełniające równości $f(v_i) = w_i$ dla $i = 1, \ldots, n$.

Dowód Jeśli $\varphi : V \to W$ jest liniowe, to dla dowolnej kombinacji liniowej $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ mamy $\phi(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(v_i)$ (*). Każdy wektor $v \in V$ jest taką kombinacją, stąd φ jest jednoznacznie określone przez wartości $\phi(v_i)$ na wektorach bazy. Z drugiej strony wzór (*) poprawnie definiuje pewne przekształcenie jeśli ustalimy wartości $\varphi(v_i)$ dla $i = 1, \ldots, n$, ponieważ przyporządkowanie wektorowi v ciągu jego współrzędnych $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ w bazie $v_1, \ldots, v_n$ jest jednoznaczne.

Twierdzenie

Jeśli wektory $v_1, \ldots, v_n$ tworzą bazę przestrzeni V, zaś wektory $w_1, \ldots, w_n$ stanowią dowolny układ n wektorów przestrzeni W to istnieje dokładnie jedno przekształcenie liniowe $f : V \to W$ spełniające równości $f(v_i) = w_i$ dla $i = 1, \ldots, n$.

Dowód Jeśli $\varphi : V \to W$ jest liniowe, to dla dowolnej kombinacji liniowej $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ mamy $\phi(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi(v_i)$ (*). Każdy wektor $v \in V$ jest taką kombinacją, stąd φ jest jednoznacznie określone przez wartości $\phi(v_i)$ na wektorach bazy. Z drugiej strony wzór (*) poprawnie definiuje pewne przekształcenie jeśli ustalimy wartości $\varphi(v_i)$ dla $i = 1, \ldots, n$, ponieważ przyporządkowanie wektorowi v ciągu jego współrzędnych $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ w bazie $v_1, \ldots, v_n$ jest jednoznaczne. Liniowość tak zdefiniowanego przekształcenia φ łatwo sprawdzić.

Przykład

Niech przekształcenie liniowe $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ będzie zadane warunkami $f((0,1)) = (2,1,1)$ oraz $f((1,2)) = (5,4,3)$.

Przykład

Niech przekształcenie liniowe $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ będzie zadane warunkami $f((0,1)) = (2,1,1)$ oraz $f((1,2)) = (5,4,3)$.

Wówczas:
$f((1,0)) = f((1,2) - 2(0,1)) = (5,4,3) - 2(2,1,1) = (1,2,1)$.

Przykład

Niech przekształcenie liniowe $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ będzie zadane warunkami $f((0,1)) = (2,1,1)$ oraz $f((1,2)) = (5,4,3)$.

Wówczas:
$f((1,0)) = f((1,2) - 2(0,1)) = (5,4,3) - 2(2,1,1) = (1,2,1)$.

Stąd $f((x_1,x_2)) = f(x_1(1,0) + x_2(0,1)) = x_1 f((1,0)) + x_2 f((0,1)) = x_1(1,2,1) + x_2(2,1,1) = (x_1 + 2x_2, 2x_1 + x_2, x_1 + x_2)$

Macierz przekształcenia liniowego

Oznaczenie: $M_{m\times n}$ = zbiór wszystkich macierzy o m wierszach i n kolumnach

Definicja

Niech V, W będą przestrzeniami liniowymi, zaś układy $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ oraz $\mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_m)$ odpowiednio bazami V i W. Macierzą przekształcenia liniowego $f : V \to W$ w bazach $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ nazywamy taką macierz $A = [a_{ij}] \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, że spełnione są równości $f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$ dla $j = 1, \ldots, n$ (tzn. w j-tej kolumnie macierzy A stoją współrzędne wektora $f(v_j)$ w bazie $\mathcal{B}$). Macierz taką oznaczamy $M(f)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$

Przykład

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ określono wzorem
$f((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2 + x_3)$.

Przykład

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ określono wzorem $f((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2 + x_3)$. Układ $\mathcal{A} = ((1,0,1),(0,1,2),(2,1,0))$ jest bazą $\mathbb{R}^3$, zaś układ $\mathcal{B} = ((0,1),(1,1))$ bazą $\mathbb{R}^2$.

Przykład

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ określono wzorem $f((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2 + x_3)$. Układ $\mathcal{A} = ((1, 0, 1), (0, 1, 2), (2, 1, 0))$ jest bazą $\mathbb{R}^3$, zaś układ $\mathcal{B} = ((0, 1), (1, 1))$ bazą $\mathbb{R}^2$.

Mamy $f((1, 0, 1)) = (1, 2) = 1(0, 1) + 1(1, 1)$,
$f((0, 1, 2)) = (-1, 1) = 2(0, 1) - 1(1, 1)$,
$f((2, 1, 0)) = (5, 1) = -4(0, 1) + 5(1, 1)$. Zatem

$$M(f)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Przykład

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ określono wzorem $f((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + x_2 - x_3, x_1 - x_2 + x_3)$. Układ $\mathcal{A} = ((1, 0, 1), (0, 1, 2), (2, 1, 0))$ jest bazą $\mathbb{R}^3$, zaś układ $\mathcal{B} = ((0, 1), (1, 1))$ bazą $\mathbb{R}^2$.
Mamy $f((1, 0, 1)) = (1, 2) = 1(0, 1) + 1(1, 1)$,
$f((0, 1, 2)) = (-1, 1) = 2(0, 1) - 1(1, 1)$,
$f((2, 1, 0)) = (5, 1) = -4(0, 1) + 5(1, 1)$. Zatem

$$M(f)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

Oznaczenie: bazę $\mathbb{R}^n$ złożoną z wektorów jednostkowych $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ będziemy nazywać bazą standardową i oznaczać *st*. Niech f będzie takie jak wyżej. Mamy $f(\varepsilon_1) = f((1, 0, 0)) = (2, 1)$, $f(\varepsilon_2) = f((0, 1, 0)) = (1, -1)$, $f(\varepsilon_3) = f((0, 0, 1)) = (-1, 1)$. Zatem

$$M(f)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Rząd macierzy

Definicja

Niech macierz $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ składa się z kolumn $k_1, \ldots, k_m$. wymiar przestrzeni $lin(k_1, \ldots, k_m) \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy rzędem A i oznaczamy $r(A)$.

Uwaga Rząd macierzy A jest zatem równy liczności maksymalnego układu liniowo niezależnego, utworzonego z kolumn A (lub wierszy A), a więc równy liczbie wierszy niezerowych macierzy schodkowej A' powstałej z A przez zastosowanie operacji wierszowych.

Twierdzenie

Niech $f : V \to W$ będzie przekształceniem liniowym przestrzeni V w przestrzeń W. Wówczas rząd macierzy $M(f)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ nie zależy od wyboru baz $\mathcal{B}$ w V i $\mathcal{C}$ w W i jest równy $\dim f(V)$