Programowanie liniowe

Mirosław Sobolewski

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW

wykład z algebry liniowej
Warszawa, styczeń 2015

Homo oeconomicus= człowiek gospodarny

Zasada najlepszego wykorzystania istniejących zasobów

Typowe przykłady

Przykład (Zagadnienie transportowe)

Jest n zakładów wydobywczych z możliwościami wydobycia $w_1, \dots, w_n$ oraz l przetwórni z popytami $p_1, \dots, p_l$. Należy zorganizować przewozy tak, by zaspokoić popyty przetwórni, przy najmniejszym koszcie, jeśli koszt przewozu jednostki środka produkcji z zakładu i do przetwórni j wynosi k_{ij}. Mamy $n \times l$ zmiennych x_{ij} oznaczających wielkość przewozu z zakładu i do przetwórni j. Zbiór dopuszczalny to podzbiór $\mathbb{R}^{n \times l}$ opisany nierównościami: $x_{ij} \geq 0$ dla $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq l$ (przewozy są nieujemne), $\sum_{j=1}^{l} x_{ij} \leq w_i$ dla $i = 1, \dots, n$ (łączna ilość środka produkcji wywiezionego z zakładu i nie przekracza jego możliwości w_i), $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \geq p_j$, dla $1 \leq j \leq l$ (łączny przywóz do przetwórni j zaspokaja jej popyt) Minimalizujemy łączny koszt przewozów, czyli $\sum_{\{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq l\}} k_{ij} x_{ij}$

Przykład

Problem diety.

Przykład

Problem diety.
Mamy na rynku n produktów spożywczych $P1, \ldots, Pn$ o cenach za jednostkę odpowiednio $q_1, \ldots, q_n$.

Przykład

Problem diety.
Mamy na rynku n produktów spożywczych $P1, \ldots, Pn$ o cenach za jednostkę odpowiednio $q_1, \ldots, q_n$. Produkty zawierają substancje odżywcze $S1, \ldots, Sk$, ilość jednostek Si w jednostce Pj określa liczba z_{ij}.

Przykład

Problem diety.

Mamy na rynku n produktów spożywczych $P1, \ldots, Pn$ o cenach za jednostkę odpowiednio $q_1, \ldots, q_n$. Produkty zawierają substancje odżywcze $S1, \ldots, Sk$, ilość jednostek Si w jednostce Pj określa liczba z_{ij}.Normy odżywcze określają minimalną zawartość substancji odżywczej w diecie $Si \geq N_i$.

Przykład

Problem diety.

Mamy na rynku n produktów spożywczych $P1, \ldots, Pn$ o cenach za jednostkę odpowiednio $q_1, \ldots, q_n$. Produkty zawierają substancje odżywcze $S1, \ldots, Sk$, ilość jednostek Si w jednostce Pj określa liczba z_{ij}.Normy odżywcze określają minimalną zawartość substancji odżywczej w diecie $Si \geq N_i$. Mamy opracować najtańszą dietę realizującą te normy, tzn. zminimalizować koszt diety $K = P1 \cdot q_1 + \ldots Pn \cdot q_n$ tak, by były spełnione normy, tzn.

$P1 \cdot z_{11} + P2 \cdot z12 + \cdots + Pn \cdot z1n \geq N_1,$

$P1 \cdot z_{21} + P2 \cdot z22 + \cdots + Pn \cdot z2n \geq N_2,$

$\ldots\ldots\ldots,$

$P1 \cdot z_{k1} + P2 \cdot zk2 + \cdots + Pn \cdot zkn \geq N_k.$

Definicja

Zadanie programowania liniowego jest to zadanie znalezienia wartości optymalnej (tzn. minimalnej bądź maksymalnej) funkcji liniowej $f(x_1, \dots, x_n) = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$ *na zbiorze* $X \subset \mathbb{R}^n$ *złożonym z punktów spełniających wszystkie warunki:*

$$\left\{\begin{array}{lr} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_{m1} + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{array}\right. \left\{\begin{array}{lr} a_{m+1\;1}x_1 + \cdots + a_{m+1\;n}x_n & \geq b_{m+1} \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots & \vdots \\ a_{m+p\;1}x_1 + \cdots + a_{m+p\;n}x_n & \geq b_{m+p} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lr} a_{m+p+1\;1}x_1 + \cdots + a_{m+p+1\;n}x_n & \leq b_{m+p+1} \\ \vdots \quad \ddots \quad \vdots & \vdots \\ a_{m+p+q\;1}x_1 + \cdots + a_{m+p+q\;n}x_n & \leq b_{m+p+q} \end{array}\right. , \left\{\begin{array}{rl} x_1 & \geq 0 \\ & \vdots \\ x_s & \geq 0 \\ x_{s+1} & \leq 0 \\ & \vdots \\ x_{s+t} & \leq 0 \end{array}\right.$$

pierwsze trzy klamry obejmują ograniczenia nieelementarne–(a), ostatnia – elementarne–(b)

Oznaczenia

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

$$A' = \begin{bmatrix} a_{m=1\ 1} & \cdots & a_{m+1\ n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m+p\ 1} & \cdots & a_{m+p\ n} \end{bmatrix}, A'' = \begin{bmatrix} a_{m+p+1\ 1} & \cdots & a_{m+p+1\ n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m+p+q\ 1} & \cdots & a_{m+p+q\ n} \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \quad b' = \begin{bmatrix} b_{m+1} \\ \vdots \\ b_{m+p} \end{bmatrix}, \quad b'' = \begin{bmatrix} b_{m+p+1} \\ \vdots \\ b_{m+p+q} \end{bmatrix}$$

Warunki (a) mogą być wtedy zapisane: $Ax = b$, $A'x \geq b'$, $A''x \leq b''$. Inne formy zapisu zadania minimalizacji programowania liniowego: Min$\{f(x) : x \in X\}$ lub $f(x) \to$ min przy warunkach (a),(b). Analogicznie dla maksymalizacji.

Przykład

$2x_1 + 3x_2 - 6x_3 \rightarrow$min przy warunkach

$$(a): \begin{array}{cccccc} x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & = 7 \\ 2x_1 & +7x_2 & & -x_4 & \geq 6 \\ 3x_1 & & -3x_3 & +x_4 & \leq 5 \end{array} ,$$

$(b): x_1 \geq 0$

Definicja

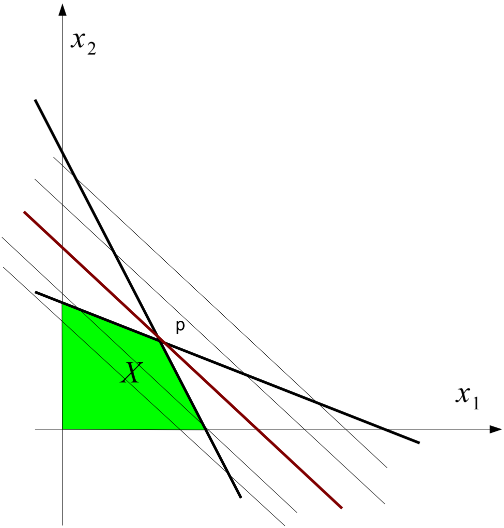
Zbiór X złożony z wektorów przestrzeni $\mathbb{R}^n$ spełniających warunki (a) i (b) nazywamy zbiorem rozwiązań dopuszczalnych zadania programowania liniowego. Rozwiązaniem optymalnym zagadnienia minimalizacji (min) nazywamy taki wektor $\overline{x} \in X$, że dla każdego $x \in X$ zachodzi $f(\overline{x}) \leq f(x)$, zaś zagadnienia maksymalizacji (max) taki wektor $\overline{x} \in X$, że zachodzi $f(x) \leq f(\overline{x})$

Interpretacja geometryczna

$x_1 + x_2 \rightarrow$max przy warunkach

(a) $2x_1 + x_2 \leq 4$, $x_1 + 3x_2 \leq 6$
(b) $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$

Szukamy "najwyższej" poziomicy funkcji $f((x_1, x_2)) = x_1 + x_2$, która zahacza o zbiór X opisany nierównościami (a) i (b). Poziomica ta przechodzi przez punkt p, bedący przecięciem prostych opisanych równościami
$2x_1 + x_2 = 4$ i $x_1 + 3x_2 = 6$.
Punkt ten ma współrzędne $p_1 = 1,2$, $p_2 = 1,6$. Zatem
$max_X f = f(p) = 2,8$


x_2
x_1
p
X

Definicja

Zadanie programowania liniowego dotyczące minimalizacji, w którym występują jako ograniczenia nieelementarne opisujące zbiór rozwiązań dopuszczalnych tylko równości (odpowiednio: tylko nierówności), zaś warunkami elementarnymi są dla wszystkich zmiennych warunki $x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$ nazywamy zadaniem w postaci standardowej (odpowiednio: klasycznej)

Twierdzenie

Każde zadanie programowania liniowego można sprowadzić do zadania w postaci standardowej. Można je także sprowadzić do postaci klasycznej.

Metody

1. Maksymalizację funkcji f można zastąpić minimalizacją funkcji $-f$

2.Warunek $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$ można zastąpić parą warunków: $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n + x_{n+i} = b_i, x_{n+i} \geq 0$, gdzie x_{n+i} jest nową zmienną, podobnie $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i$ można zastąpić parą warunków $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n - x_{n+i} = b_i, x_{n+i} \geq 0$.

3. jeśli mamy warunek $x_j \leq 0$ to podstawiamy $x_j = -x_j'$, zastępując go przez $x_j' \geq 0$

4. Jeśli pewna zmienna x_j nie występuje w żadnym ograniczeniu elementarnym postaci $x_j \geq 0$ lub $x_j \leq 0$, to podstawiamy $x_j = x_j^+ - x_j^-$ i dołączamy warunki $x_j^+ \geq 0$, $x_j^- \geq 0$.

5. Równanie $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$ można zastąpić układem nierówności $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$, $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i$

Przykład

$x_1 + x_2 \to max$
$2x_1 + x_2 \leq 4$
$x_1 + 3x_2 \leq 6$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
daje postać standardową
$-x_1 - x_2 \to min$
$2x_1 + x_2 + x_3 = 4$
$x_1 + 3x_2 + x_4 = 6$
$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$

Zbiór wielościenny wypukły – dowolny zbiór opisany skończonym układem nieostrych nierówności liniowych

odcinek o końcach $p, q \in \mathbb{R}^n$ – zbiór $\{tp + (1-t)q \in \mathbb{R}^n | t \in [0,1]\}$

punkt wewnętrzny odcinka o końcach p, q – każdy jego punkt różny od p, q

Wierzchołek (punkt ekstremalny) zbioru $X \subset \mathbb{R}^n$ – element X, który nie jest punktem wewnętrznym żadnego odcinka zawartego w X

Twierdzenie

Zbiór rozwiązań dopuszczalnych zadania programowania liniowego jest zbiorem wielościennym wypukłym

Twierdzenie

Rozpatrzmy zadanie programowania liniowego w postaci standardowej. Wówczas funkcja $f(x) = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$ osiąga wartość minimalną (tzn. najmniejszą) na zbiorze rozwiązań dopuszczalnych $X \Leftrightarrow f$ jest ograniczona z dołu na X. Ponadto jeśli f osiąga wartość minimalną to osiąga ją również w pewnym wierzchołku (= punkcie ekstremalnym) zbioru X.

Rozwiązania bazowe

Rozpatrujemy zadanie programowania liniowego w postaci standardowej:

$c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n \to min$

przy warunkach

$$U: \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots & \quad \vdots \\ a_{m1}x_{m1} + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}, x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0, \text{ gdzie } b_i \geq 0$$

dla $i = 1, \ldots, m$. W skrócie :

$$\text{Min}\{c^\top \cdot x : Ax = b, x \geq 0\}, \text{ gdzie } A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$ Można założyć, że $r(A) = m$.

Kolumny bazowe– dowolny układ m liniowo niezależnych kolumn macierzy A, odpowiadające im zmienne x_i– zmienne bazowe.

Pozostałe zmienne to zmienne niebazowe (albo wtórne). Zbiór $Z_{\mathcal{B}} = \{j_1, \ldots, j_m\}$ indeksów zmiennych bazowych to zbiór bazowy.

Oznaczmy $x_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} x_{j_1} \\ \vdots \\ x_{j_m} \end{bmatrix}$ wektor zmiennych bazowych, $x_D = \begin{bmatrix} x_{j_{m+1}} \\ \vdots \\ x_{j_n} \end{bmatrix}$ wektor zmiennych niebazowych. Rozwiązanie ogólne układu U, w którym zmienne bazowe sa zmiennymi zależnymi, zaś zmienne niebazowe – parametrami uzyskamy sprowadzając (elementarnymi operacjami na wierszach) macierz układu U do postaci, w której w kolumnach o numerach bazowych stoja kolejno

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązania bazowe

Niech $\mathcal{B} = [k_{j_1} k_{j_2} \ldots k_{j_m}] \in M_{m\times m}(\mathbb{R})$ podmacierz macierzy A złożona z kolumn bazowych, zaś $D = [k_{j_{m+1}} \ldots k_{j_n}]$ – podmacierz kolumn niebazowych. Wtedy $Ax = b$ oznacza $Bx_{\mathcal{B}} + Dx_D = b$, zatem $x_{\mathcal{B}} + \mathcal{B}^{-1}Dx_D = \mathcal{B}^{-1}b$ (*) – postać bazowa układu U

Definicja

Rozwiązanie $\overline{x}$ układu U, w którym zmienne niebazowe są równe 0 nazywamy rozwiązaniem bazowym (względem układu bazowego $\mathcal{B}$). Mamy więc $\overline{x}_D = 0$ czyli z (*) $\overline{x}_{\mathcal{B}} = \mathcal{B}^{-1}b$. Jeśli rozwiązanie bazowe jest nieujemne, tzn. $x_j \geq 0, j = 1, \ldots, n$ to nazywamy je rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym

Uwaga

Zadanie programowania liniowego w postaci standardowej, w którym $n > m$ może mieć najwyżej $\binom{n}{m}$ rozwiązań bazowych

Twierdzenie

Wektor $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ *jest wierzchołkiem zbioru rozwiązań dopuszczalnych zadania programowania liniowego w postaci standardowej* $\Leftrightarrow$ $\overline{x}$ *jest rozwiązaniem bazowym dopuszczalnym tego układu.*