# Formy kwadratowe

Mirosław Sobolewski

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW

14. wykład z algebry liniowej
Warszawa, styczeń 2011

## Definicja

*Niech $V, W, U$ będą przestrzeniami liniowymi (nad $\mathbb{R}$).*
*Przekształcenie $\Phi : V \times W \to U$ nazwiemy przekształceniem* *dwuliniowym jeśli spełnia poniższe warunki:*
*(i)* $\Phi(v + v', w) = \Phi(v, w) + \Phi(v', w)$*, dla dowolnych* $v, v' \in V, \quad w \in W$
*(ii)*$\Phi(\alpha v, w) = \alpha\Phi(v, w)$*, dla dowolnych* $\alpha \in \mathbb{R}$, $v \in V$, $w \in W$
*(i')* $\Phi(v, w + w') = \Phi(v, w) + \Phi(v, w')$*, dla dowolnych*
$v, \in V, \quad w, w' \in W$
*(ii')*$\Phi(v, \alpha w) = \alpha\Phi(v, w)$*, dla dowolnych* $\alpha \in \mathbb{R}$, $v \in V$, $w \in W$

**Uwaga:** Można powiedzieć, że $\Phi$ jest dwuliniowe jeśli jest liniowe ze względu na każdy z argumentów przy ustaleniu wartości drugiego z argumentów.

### Przykład

(a) Niech $V = W = U = \mathbb{R}$. Wówczas przekształcenie $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zdefiniowane przez $\Phi(\alpha, \beta) = \alpha\beta$ jest dwuliniowe.
(b) Niech $V = W = U = \mathcal{F}(\mathbb{R})$ będzie przestrzenią wszystkich funkcyj rzeczywistych. Wtedy wzór $\Phi(f, g) = f \cdot g$, dla$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ opisuje przekształcenie dwuliniowe.
(c) Niech $V = M_{k\times l}(\mathbb{R})$, $W = M_{l\times m}(\mathbb{R})$, $U = M_{k\times m}(\mathbb{R})$, Wówczas $\Phi : V \times W \to U$ określone przez $\Phi(M, N) = M \cdot N$, dla $M \in M_{k\times l}(\mathbb{R}), \quad N \in M_{l\times m}(\mathbb{R})$ jest dwuliniowe.

### Definicja

*Niech $V$ będzie przestrzenią liniową. Dowolne przekształcenie dwuliniowe $V \times V \to \mathbb{R}$ nazwiemy formą dwuliniową. Jeśli $\Phi$ spełnia $\Phi(v, w) = \Phi(w, v)$ dla dowolnych $v, w \in V$,to powiemy, że forma $\Phi$ jest symetryczna.*

## Przykład

(a) Niech $V = \mathbb{R}^n$. Wówczas przyporządkowanie zadane przez iloczyn skalarny $(v, w) \mapsto v \circ w$ jest formą dwuliniową symetryczną.
(b)Niech $V = \mathbb{R}^2$. Zdefiniujmy $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ przez $\Phi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1 y_1 - x_2 y_1$. $\Phi$ jest formą dwuliniową (niesymetryczną). Ogólnie : dowolną formę dwuliniową $\Psi$ na $\mathbb{R}^n$ można zapisać w postaci $\Psi((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + \cdots + a_{1n}x_1y_n + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2 + \cdots + a_{2n}x_2y_n + \cdots + a_{n1}x_ny_1 + a_{n2}x_ny_2 + \cdots + a_{nn}x_ny_n = \sum_{1 \le i,j \le n} a_{ij}x_iy_j$, gdzie $a_{ij} \in \mathbb{R}$ dla $1 \le i, j \le n$ są ustalonymi współczynnikami. Także każdy taki wzór opisuje pewną formę dwuliniową, przy czym forma ta jest symetryczna $\Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji}$ dla $1 \le i, j \le n$.

## Definicja

*Niech $V$ będzie przestrzenią liniową, $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ będzie formą dwuliniową na $V$, zaś $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ pewną bazą w $V$. Wówczas macierz $A = [a_{ij}] \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ zdefiniowaną przez $a_{ij} = \Phi(v_i, v_j)$ dla $1 \leq i, j \leq n$ nazywamy macierzą formy dwuliniowej $\Phi$ w bazie $\mathcal{B}$*

## Twierdzenie

*Niech $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ będzie formą dwuliniową określoną na przestrzeni liniowej $V$, zaś macierz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ macierzą $\Phi$ w pewnej bazie $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ przestrzeni $V$. Wówczas:*

*(i) Macierz $A$ jest symetryczna $\Leftrightarrow$ forma $\Phi$ jest symetryczna*

*(ii) jeśli $v_{\mathcal{B}}$ oznacza kolumnę współrzędnych wektora $v \in V$ w bazie $\mathcal{B}$ to $\Phi(v, w) = v_{\mathcal{B}}^{\top} A w_{\mathcal{B}}$ dla $v, w \in V$.*

## Przykład

Niech forma dwuliniowa $\Phi$ na $\mathbb{R}^2$ będzie zadana wzorem $\Phi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 - x_2y_1$. Niech $\mathcal{B} = ((1,1), (1,2) = (v_1, v_2))$ – baza $\mathbb{R}^2$. Macierzą $\Phi$ w bazie standardowej jest $\left[\begin{array}{cc} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{array}\right]$.

Ogólnie macierzą formy na $\mathbb{R}^n$ postaci $\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}x_iy_j$ jest w bazie standardowej macierz $[a_{ij}] \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Ponieważ $\Phi(v_1, v_1) = 1$, $\Phi(v_1, v_2) = 1$, $\Phi(v_2, v_1) = 0$, $\Phi(v_2, v_2) = 0$, zatem macierzą $\Phi$ w bazie $\mathcal{B}$ jest $\left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}\right]$. Niech teraz $w = 3v_1 + 2v_2 = (5,7)$, zaś $u = v_1 - v_2 = (0,-1)$, czyli $w_{\mathcal{B}} = [3,2]^\top$, $u_{\mathcal{B}} = [1,-1]^\top$. Zgodnie z twierdzeniem

$$\Phi(w,u) = \left[\begin{array}{cc} 3 & 2 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 3 & 3 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array}\right] = 0$$

# Zamiana bazy a macierz formy

**Twierdzenie**

*Niech $V$ będzie przestrzenią liniową, zaś $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ oraz $\mathcal{B} = (v'_1, \ldots, v'_n)$ bazami przestrzeni $V$. Niech $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ będzie forma dwuliniową na $V$. Oznaczmy przez $A$ macierz $\Phi$ w bazie $\mathcal{A}$, zaś przez $B$ macierz $\Phi$ w bazie $\mathcal{B}$ oraz niech $M = M(id)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$ będzie macierzą zamiany współrzędnych. Wówczas $B = M^\top AM$.*

**Uwaga:** Chociaż zarówno endomorfizmy na przestrzeni n-wymiarowej, jak i formy dwuliniowe reprezentowane są przez podobne obiekty arytmetyczne – macierze kwadratowe $n \times n$ to macierze te inaczej zmieniają się przy przejściu od pewnej bazy do innej bazy.

## Przykład

Niech Niech $V = \mathbb{R}^2$. Zdefiniujmy $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ przez $\Phi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1 y_1 - x_2 y_1$. Niech $\mathcal{B} = ((1,1),(1,2)) = (v_1, v_2)$ – baza $\mathbb{R}^2$. Niech $\mathcal{A}$ oznacza bazę standardową, $A$ – macierz $\Phi$ w $\mathcal{A}$, $B$ – macierz $\Phi$ w $\mathcal{B}$. Niech $M = M(id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ oznacza macierz zamiany współrzędnych. Mamy

$$M^\top A M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = B$$

zgodnie z bezpośrednim obliczeniem.

# Formy kwadratowe

## Definicja

*Niech $V$ będzie przestrzenią liniową. Powiemy, że funkcja $Q : V \to \mathbb{R}$ jest **formą kwadratową** na $V$, jeśli istnieje taka forma dwuliniowa symetryczna $\Phi$ na $V$, że $Q(v) = \Phi(v, v)$. Formę $\Phi$ będziemy wówczas nazywać formą dwuliniową symetryczną **odpowiadającą** formie kwadratowej $Q$.*

## Twierdzenie

*Niech $Q$ będzie formą kwadratową na przestrzeni liniowej $V$ i niech $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ będzie odpowiadającą $Q$ formą dwuliniową symetryczną. Wówczas $\Phi(v, w) = \frac{1}{2}(Q(v + w) - Q(v) - Q(w))$. Zatem każdej formie kwadratowej odpowiada tylko jedna forma dwuliniowa symetryczna*

## Przykład

Niech funkcja $Q : V \to \mathbb{R}$ na $V = \mathbb{R}^2$, $Q((x_1, x_2)) = 4x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$. Funkcja $Q$ jest formą kwadratową na $V$.Odpowiadającą jej formą dwuliniową symetryczną jest
$\Phi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 4x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2$. Ogólnie: dowolny wielomian jednorodny (tzn. taki, którego wszystkie jednomiany są tego samego stopnia) stopnia 2 określa pewną formę kwadratową w $\mathbb{R}^n$

## Definicja

*Niech $V$ będzie przestrzenią linową, zaś $\mathcal{B}$ bazą $V$. Niech $Q$ będzie formą kwadratową na $V$. Macierzą $Q$ w bazie $\mathcal{B}$ nazwiemy macierz w tejże bazie formy dwuliniowej symetrycznej odpowiadającej $Q$*

## Przykład

Macierzą $Q((x_1, x_2)) = 4x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$ jest w bazie standardowej w $\mathbb{R}^2$ macierz $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Uwaga: Jeśli $Q$ jest formą kwadratową i $Q((x_1,\ldots,x_n)) = \sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2 + \sum_{\{1\le i<j\le n\}} a_{ij}x_ix_j$ to macierzą $Q$ w bazie standardowej jest $M = [b_{ij}]$, w której $b_{ii} = a_{ii}$ dla $i = 1,\ldots n$ oraz $b_{ij} = b_{ji} = \frac{1}{2}a_{ij}$ dla $1 \le i < j \le n$.

## Definicja

*Niech $V$ będzie przestrzenią liniową, zaś $Q : V \to \mathbb{R}$ – formą kwadratową na $V$. Powiemy, że forma $Q$ jest dodatnio(ujemnie) określona, jeśli $Q(v) > 0$ ($< 0$) dla każdego niezerowego wektora $v \in V$.*

## Przykład

(a) W $\mathbb{R}^n$ forma kwadratowa zdefiniowana $Q(v) = ||v||^2 = v \circ v$ jest dodatnio określona, zaś forma $Q'$ zdefiniowana $Q'(v) = -Q(v)$ jest ujemnie określona.
(b) Forma $Q$ na $\mathbb{R}^2$ określona $Q((x_1,x_2)) = 4x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$ jest dodatnio określona, gdyż $Q((x_1,x_2)) = 3x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 > 0$ dla $x_1 \neq 0$ lub $x_2 \neq 0$.

## Twierdzenie (Kryterium Sylvestera)

*Niech $Q$ będzie formą kwadratową na przestrzeni liniowej $V$, dim $V = n$ zaś $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ jej macierzą w pewnej bazie przestrzeni $V$. Niech $W_i$ dla $i = 1, \ldots, n$ oznacza wyznacznik macierzy $i \times i$ powstałej z $A$ przez wykreślenie ostatnich $n - i$ wierszy i kolumn. Wtedy: Forma $Q$ jest dodatnio określona $\Leftrightarrow W_i > 0$ dla $i = 1, \ldots, n$.*

**Uwaga** Ponieważ forma $Q$ jest ujemnie określona $\Leftrightarrow -Q$ jest dodatnio określona, kryterium to pozwala rozstrzygać również ujemną określoność formy. Stąd:

## Twierdzenie (2)

*Niech $Q$ będzie formą kwadratową na przestrzeni liniowej $V$, dim $V = n$ zaś $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ jej macierzą w pewnej bazie przestrzeni $V$. Niech $W_i$ dla $i = 1, \ldots, n$ oznacza wyznacznik macierzy $i \times i$ powstałej z $A$ przez wykreślenie ostatnich $n - i$ wierszy i kolumn. Wtedy: Forma $Q$ jest ujemnie określona $\Leftrightarrow W_i < 0$ dla $i$ nieparzystych oraz $W_i > 0$ dla parzystych $i$, gdzie $i = 1, \ldots, n$.*

## Przykład

a) Niech $Q((x_1, x_2)) = 4x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$ forma kwadratowa na $\mathbb{R}^2$. jej macierzą w bazie standardowej jest $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, zatem $W_1 = 4 > 0$,

$W_2 = \det \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 3 > 0$, czyli $Q$ jest dodatnio określona, na mocy kryterium Sylvestera.

b) Niech $Q((x_1, x_2, x_3)) = -x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 + 2x_2x_3 - 2x_3^2$ będzie formą kwadratową określoną na $\mathbb{R}^3$. Jej macierzą w bazie standardowej jest $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$. Mamy $W_1 = -1 < 0$,

$W_2 = \det \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = 1 > 0$,

$W_3 = \det \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = -4 + 1 + 2 = -1 < 0$ zatem $Q$ jest ujemnie określona (tw. 2)

## Przykład

c) Niech $Q((x_1, x_2)) = -x_1^2 + 6x_1x_2 - x_2^2$ będzie formą kwadratową na $\mathbb{R}^2$. Jej macierzą w bazie standardowej jest $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$. Mamy: $W_1 = -1 < 0$, $W_2 = \det \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = 1 - 9 = -8 < 0$. Zatem $Q$ nie jest ani dodatnio określona, ani ujemnie określona. Rzeczywiście $Q((1, 0)) = -1 < 0$, zaś $Q((1, 1)) = 4 > 0$.

## Przykład

c) Niech $Q((x_1, x_2)) = -x_1^2 + 6x_1x_2 - x_2^2$ będzie formą kwadratową na $\mathbb{R}^2$. Jej macierzą w bazie standardowej jest $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$. Mamy: $W_1 = -1 < 0$, $W_2 = \det \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = 1 - 9 = -8 < 0$. Zatem $Q$ nie jest ani dodatnio określona, ani ujemnie określona. Rzeczywiście $Q((1, 0)) = -1 < 0$, zaś $Q((1, 1)) = 4 > 0$.

## Definicja

*Formę kwadratową $Q$ na przestrzeni liniowej $V$ nazywamy dodatnio półokreśloną (ujemnie półokreśloną) jeśli dla wszystkich wektorów $v \in V$ zachodzi $Q(v) \geq 0$ ($Q(v) \leq 0$).*

**Uwaga:** Tak zdefiniowane formy dodatnio (ujemnie) półokreślone obejmują jako szczególny przypadek formy dodatnio (ujemnie) określone

## Przykład

Niech $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ forma kwadratowa zdefiniowana wzorem $Q((x_1, x_2)) = x_1^2$ jest dodatnio półokreślona, ale nie jest dodatnio określona

Do badania dodatniej i ujemnej półokreśloności form kwadratowych można użyć następującego twierdzenia.

## Twierdzenie

*Niech $Q$ będzie formą kwadratową, która w pewnej bazie ortonormalnej (czyli w szczególności w bazie standardowej) ma macierz $M$. Niech $\phi_M$ będzie endomorfizmem, którego macierzą jest $M$. Wówczas $Q$ jest dodatnio (ujemnie) półokreślona $\Leftrightarrow$ wszystkie wartości własne $\phi_M$ są nieujemne (niedodatnie). Ponadto, jeśli są one dodatnie (ujemne) to również $Q$ jest dodatnio (ujemnie) określona.*

Inaczej mówiąc, $Q$ jest dodatnio (ujemnie) półokreślona $\Leftrightarrow$ wszystkie pierwiastki wielomianu charakterystycznego $w_\phi$ są nieujemne (niedodatnie )

## Przykład

Niech $Q$ będzie formą kwadratową na $\mathbb{R}^3$ opisaną wzorem $Q(x_1, x_2, x_3)) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_3^2$. Macierzą $Q$ w bazie standardowej jest $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Wielomianem charakterystycznym tej macierzy jest $w(\lambda) =$
$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (\lambda^2 - 2\lambda + 1 - 1)(2-\lambda) = -\lambda(\lambda-2)^2.$
Pierwiastkami $w$ są 0 i 2 (podwójny). Stąd, na mocy powyższego twierdzenia wnosimy, że $Q$ jest dodatnio półokreślona, ale nie jest dodatnio określona. Istotnie $Q((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + x_2)^2 + 2x_3^2 \geq 0$ oraz $Q((1, -1, 0)) = 0$.

**Uzupełnienie** Jeśli $M$ jest macierzą formy kwadratowej $Q$ na $V$ w bazie $\mathcal{B}$, zaś $v_{\mathcal{B}}$ kolumną współrzędnych wektora $v \in V$ w $\mathcal{B}$ to $Q(v) = v_{\mathcal{B}}^\top M v_{\mathcal{B}}$.