Iloczyn skalarny

Mirosław Sobolewski

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW

10. wykład z algebry liniowej
Warszawa, grudzień 2011

Standardowy iloczyn skalarny

Definicja

Iloczynem skalarnym wektorów $v = (x_1, \ldots, x_n)$ *i* $w = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ *nazywamy liczbę rzeczywistą* $v \cdot w = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \in \mathbb{R}$.

Standardowy iloczyn skalarny

Definicja

Iloczynem skalarnym wektorów $v = (x_1, \dots, x_n)$ *i* $w = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ *nazywamy liczbę rzeczywistą* $v \cdot w = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \in \mathbb{R}$.

Przykład

Niech $v, w \in \mathbb{R}^4$, $v = (1, 0, -1, 2)$, $w = (2, 1, 3, 0)$. Wówczas
$v \cdot w = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 0 = 2 - 3 = -1$

Standardowy iloczyn skalarny

Definicja

Iloczynem skalarnym wektorów $v = (x_1, \ldots, x_n)$ *i* $w = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ *nazywamy liczbę rzeczywistą* $v \cdot w = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \in \mathbb{R}$.

Przykład

Niech $v, w \in \mathbb{R}^4$, $v = (1, 0, -1, 2)$, $w = (2, 1, 3, 0)$. Wówczas
$v \cdot w = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 0 = 2 - 3 = -1$

Własności iloczynu skalarnego

Twierdzenie

Niech $v, w, v', w' \in \mathbb{R}^n$, *zaś* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Wówczas:*
(i) $(v + v') \cdot w = v \cdot w + v' \cdot w$, $v \cdot (w + w') = v \cdot w + v \cdot w'$

Standardowy iloczyn skalarny

Definicja

Iloczynem skalarnym wektorów $v = (x_1, \dots, x_n)$ *i* $w = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ *nazywamy liczbę rzeczywistą* $v \cdot w = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i \in \mathbb{R}$.

Przykład

Niech $v, w \in \mathbb{R}^4$, $v = (1, 0, -1, 2)$, $w = (2, 1, 3, 0)$. Wówczas
$v \cdot w = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 0 = 2 - 3 = -1$

Własności iloczynu skalarnego

Twierdzenie

Niech $v, w, v', w' \in \mathbb{R}^n$, *zaś* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Wówczas:*
(i) $(v + v') \cdot w = v \cdot w + v' \cdot w$, $v \cdot (w + w') = v \cdot w + v \cdot w'$
(ii) $(\alpha v) \cdot w = \alpha(v \cdot w)$

Standardowy iloczyn skalarny

Definicja

Iloczynem skalarnym wektorów $v = (x_1, \ldots, x_n)$ *i* $w = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ *nazywamy liczbę rzeczywistą* $v \cdot w = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \in \mathbb{R}$.

Przykład

Niech $v, w \in \mathbb{R}^4$, $v = (1, 0, -1, 2)$, $w = (2, 1, 3, 0)$. Wówczas
$v \cdot w = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 0 = 2 - 3 = -1$

Własności iloczynu skalarnego

Twierdzenie

Niech $v, w, v', w' \in \mathbb{R}^n$*, zaś* $\alpha \in \mathbb{R}$*. Wówczas:*
(i) $(v + v') \cdot w = v \cdot w + v' \cdot w$, $v \cdot (w + w') = v \cdot w + v \cdot w'$
(ii) $(\alpha v) \cdot w = \alpha(v \cdot w)$
(iii) $v \cdot w = w \cdot v$

Standardowy iloczyn skalarny

Definicja

Iloczynem skalarnym wektorów $v = (x_1, \ldots, x_n)$ *i* $w = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ *nazywamy liczbę rzeczywistą* $v \cdot w = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \in \mathbb{R}$.

Przykład

Niech $v, w \in \mathbb{R}^4$, $v = (1, 0, -1, 2)$, $w = (2, 1, 3, 0)$. Wówczas
$v \cdot w = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 0 = 2 - 3 = -1$

Własności iloczynu skalarnego

Twierdzenie

Niech $v, w, v', w' \in \mathbb{R}^n$, *zaś* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Wówczas:*
(i) $(v + v') \cdot w = v \cdot w + v' \cdot w$, $v \cdot (w + w') = v \cdot w + v \cdot w'$
(ii) $(\alpha v) \cdot w = \alpha(v \cdot w)$
(iii) $v \cdot w = w \cdot v$
(iv) $v \cdot v > 0$ *dla* $v \neq \mathbf{0}$

Definicja

Długością wektora $v = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *nazywamy liczbę* $||v|| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.

uwaga Długość wektora jest liczbą nieujemną.

Definicja

Długością wektora $v = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *nazywamy liczbę* $||v|| = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.

uwaga Długość wektora jest liczbą nieujemną.

Przykład

Niech $v = (3, 1, -2) \in \mathbb{R}^3$. Wtedy $||v|| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14}$.

Twierdzenie

Niech $v \in \mathbb{R}^n$*, zaś* $\alpha \in \mathbb{R}$*. Wtedy*

Twierdzenie

Niech $v \in \mathbb{R}^n$*, zaś* $\alpha \in \mathbb{R}$*. Wtedy*

a) $||\alpha v|| = |\alpha| \cdot ||v||$

Twierdzenie

Niech $v \in \mathbb{R}^n$*, zaś* $\alpha \in \mathbb{R}$*. Wtedy*

a) $||\alpha v|| = |\alpha| \cdot ||v||$

b) Jeśli $v \neq \mathbf{0}$*, to wektor* $\frac{1}{||v||} v$ *ma długość* 1*. Będziemy go nazywać* *unormowaniem* *wektora* v*.*

Twierdzenie

Niech $v \in \mathbb{R}^n$, zaś $\alpha \in \mathbb{R}$. Wtedy
a) $||\alpha v|| = |\alpha| \cdot ||v||$
b) Jeśli $v \neq \mathbf{0}$, to wektor $\frac{1}{||v||}v$ ma długość 1. Będziemy go nazywać unormowaniem wektora v.

Definicja

Mówimy, że wektory $v, w \in \mathbb{R}^n$ są prostopadłe jeśli $v \cdot w = 0$. Będziemy wówczas pisać $v \perp w$.

Przykład

$v = (3, 2, 1), w = (7, -6, -9), w' = (1, 6, -6)$. Mamy
$v \cdot w = (3 \cdot 7 + 2 \cdot (-6) + 1 \cdot (-9) = 21 - 12 - 9 = 0$ zatem $v \perp w$,
natomiast $v \cdot w' = 3 + 6 - 6 = 3 \neq 0$ czyli v i w' nie są prostopadłe.

Twierdzenie

Niech $v \in \mathbb{R}^n$*, zaś* $\alpha \in \mathbb{R}$*. Wtedy*

a) $||\alpha v|| = |\alpha| \cdot ||v||$

b) Jeśli $v \neq \mathbf{0}$*, to wektor* $\frac{1}{||v||} v$ *ma długość* 1*. Będziemy go nazywać* *unormowaniem* *wektora* v*.*

Definicja

Mówimy, że wektory $v, w \in \mathbb{R}^n$ *są* *prostopadłe* *jeśli* $v \cdot w = 0$*.*
Będziemy wówczas pisać $v \perp w$*.*

Przykład

$v = (3, 2, 1), w = (7, -6, -9), w' = (1, 6, -6)$. Mamy
$v \cdot w = (3 \cdot 7 + 2 \cdot (-6) + 1 \cdot (-9) = 21 - 12 - 9 = 0$ zatem $v \perp w$,
natomiast $v \cdot w' = 3 + 6 - 6 = 3 \neq 0$ czyli v i w' nie są prostopadłe.

Twierdzenie (Pitagorasa)

Jeśli wektory $v, w \in \mathbb{R}^n$ *są prostopadłe to* $||v + w||^2 = ||v||^2 + ||w||^2$*.*

Definicja

Niech $V \in \mathbb{R}^n$ *będzie podprzestrzenią liniową.* *Dopełnieniem ortogonalnym* V *w* $\mathbb{R}^n$ *nazwiemy zbiór* $V^{\perp} = \{w \in \mathbb{R}^n | \forall v \in V : v \cdot w = 0\}$. *Jest on podprzestrzenia liniową* $\mathbb{R}^n$

Definicja

Niech $V \in \mathbb{R}^n$ będzie podprzestrzenią liniową. Dopełnieniem ortogonalnym V w $\mathbb{R}^n$ nazwiemy zbiór $V^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n | \forall v \in V : v \cdot w = 0\}$. Jest on podprzestrzenia liniową $\mathbb{R}^n$

Twierdzenie

Niech $V \subset \mathbb{R}^n$ będzie podprzestrzenią i niech $dimV = k$. Wtedy $dimV^\perp = n - k$ oraz $V \cap V^\perp = \{\mathbf{0}\}$

Uwagi :

Definicja

Niech $V \in \mathbb{R}^n$ będzie podprzestrzenią liniową. Dopełnieniem ortogonalnym V w $\mathbb{R}^n$ nazwiemy zbiór $V^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n | \forall v \in V : v \cdot w = 0\}$. Jest on podprzestrzenia liniową $\mathbb{R}^n$

Twierdzenie

Niech $V \subset \mathbb{R}^n$ będzie podprzestrzenią i niech $dim V = k$. Wtedy $dim V^\perp = n - k$ oraz $V \cap V^\perp = \{\mathbf{0}\}$

Uwagi :

a) Oznaczenia $A^\perp$ można również używać dla zbioru $A \subset \mathbb{R}^n$ nie będącego podprzestrzenią, tzn. $A^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n | \forall a \in A : a \cdot w = \mathbf{0}\}$. Zawsze $A^\perp$ jest podprzestrzenią $\mathbb{R}^n$ i $A^\perp = (lin A)^\perp$.

Definicja

Niech $V \in \mathbb{R}^n$ *będzie podprzestrzenią liniową. Dopełnieniem ortogonalnym* V *w* $\mathbb{R}^n$ *nazwiemy zbiór* $V^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n | \forall v \in V : v \cdot w = 0\}$*. Jest on podprzestrzenia liniową* $\mathbb{R}^n$

Twierdzenie

Niech $V \subset \mathbb{R}^n$ *będzie podprzestrzenią i niech* $dimV = k$*. Wtedy* $dimV^\perp = n - k$ *oraz* $V \cap V^\perp = \{\mathbf{0}\}$

Uwagi :

a) Oznaczenia $A^\perp$ można również używać dla zbioru $A \subset \mathbb{R}^n$ nie będącego podprzestrzenią, tzn. $A^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n | \forall a \in A : a \cdot w = \mathbf{0}\}$. Zawsze $A^\perp$ jest podprzestrzenią $\mathbb{R}^n$ i $A^\perp = (linA)^\perp$.

b) Jeśli V jest podprzestrzenią $\mathbb{R}^n$, to $(V^\perp)^\perp = V$. Dla dowolnego podzbioru $A \subset \mathbb{R}^n$ zachodzi $(A^\perp)^\perp = lin\ A$

Definicja

Niech $V \in \mathbb{R}^n$ będzie podprzestrzenią liniową. Dopełnieniem ortogonalnym V w $\mathbb{R}^n$ nazwiemy zbiór $V^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n | \forall v \in V : v \cdot w = 0\}$. Jest on podprzestrzenia liniową $\mathbb{R}^n$

Twierdzenie

Niech $V \subset \mathbb{R}^n$ będzie podprzestrzenią i niech $dimV = k$. Wtedy $dimV^\perp = n - k$ oraz $V \cap V^\perp = \{\mathbf{0}\}$

Uwagi :

a) Oznaczenia $A^\perp$ można również używać dla zbioru $A \subset \mathbb{R}^n$ nie będącego podprzestrzenią, tzn. $A^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n | \forall a \in A : a \cdot w = \mathbf{0}\}$. Zawsze $A^\perp$ jest podprzestrzenią $\mathbb{R}^n$ i $A^\perp = (linA)^\perp$.
b) Jeśli V jest podprzestrzenią $\mathbb{R}^n$, to $(V^\perp)^\perp = V$. Dla dowolnego podzbioru $A \subset \mathbb{R}^n$ zachodzi $(A^\perp)^\perp = lin\ A$
c) Jeśli $V = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n | a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0\}$ to $V^\perp = lin((a_1, \ldots, a_n))$ (równoważnie: $(lin((a_1, \ldots, a_n)))^\perp = V$.

Przykład

a) Niech podprzestrzeń $V \subset \mathbb{R}^2$, opisana będzie przez $2x_1 + 5x_2 = 0$, czyli $V = lin((5, -2))$. Mamy: $V^\perp = lin((2, 5))$

Ogólniej, jeśli przestrzeń $V \subset \mathbb{R}^n$ opisana jest układem równań liniowych jednorodnych $\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + & \cdots & a_{1n}x_n & = 0 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & \cdots & a_{2n}x_n & = 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & \cdots & a_{mn}x_n & = 0 \end{cases}$ to $V^\perp = lin((a_{11}, \ldots, a_{1n}), \ldots, (a_{m1}, \ldots, a_{mn}))$.

Przykład

Niech $V \subset \mathbb{R}^4$ będzie opisana układem

$$U : \begin{cases} 2x_1 + & 3x_2 & +5x_3 + & 2x_4 & = 0 \\ 3x_1 + & x_2 & +6x_3 + & 2x_4 & = 0 \end{cases}$$ Wtedy

$V^\perp = lin((2, 3, 5, 2), (3, 1, 6, 2))$

Definicja

Niech $V \subset \mathbb{R}^n$ *będzie podprzestrzenią liniową, zaś* $\mathcal{A} = \{v_1, \ldots, v_k\}$ *bazą* V*. Powiemy, że* $\mathcal{A}$ *jest ortogonalna (= prostopadła) jeśli* $v_i \perp v_j$ *dla* $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, k$*. Mówimy, że* $\mathcal{A}$ *jest ortonormalna (= ortogonalna i unormowana)jeśli jest ortogonalna i każdy wektor z* $\mathcal{A}$ *ma długość* 1*.*

Przykład

1. Baza standardowa jest bazą ortonormalną przestrzeni $\mathbb{R}^n$
2. baza $(-1/3, 2/3, 2/3), (2/3, -1/3, 2/3), (2/3, 2/3, -1/3)$ jest bazą ortonormalną przestrzeni $\mathbb{R}^3$.
3. Baza $(1, 2, 3), (2, 1, 0), (0, 0, 5)$ nie jest bazą ortogonalną .

Przykład

4. Niech $V \subset \mathbb{R}^3$, $V : 2x_1 + x_2 - x_3 = 0$. Układ $(1, 1, 3), (4, -7, 1)$ jest bazą ortogonalną V. Układ $\frac{1}{\sqrt{11}}(1, 1, 3)$, $\frac{1}{\sqrt{66}}(4, -7, 1)$ jest bazą ortonormalną V.

Uwaga:

Jeśli układ $v_1, \ldots, v_k$ wektorów $\mathbb{R}^n$ składa się z wektorów niezerowych parami prostopadłych, tzn. $v_i \neq \mathbf{0}$ dla $i = 1, \ldots, k$, $v_i \perp v_j$ dla $i \neq j$, to jest on liniowo niezależny i stanowi bazę ortogonalną $lin(v_1, \ldots, v_k)$. Mówimy również, że układ wektorów $v_1, v_2, \ldots, v_k$ jest ortogonalny, jeśli spełnia $v_i \perp v_j$ dla $i \neq j$.

Twierdzenie

Jeśli $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_k)$ jest bazą ortonormalną przestrzeni $V \subset \mathbb{R}^n$, to wówczas współrzędne dowolnego wektora $v \in V$ w bazie $\mathcal{A}$ wynoszą kolejno $v \cdot v_1, v \cdot v_2, \ldots, v \cdot v_k$.

Dowód: Niech $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k$. Wtedy
$v \cdot v_i = (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k) \cdot v_i =$
$\alpha_1 v_1 \cdot v_i + \alpha_2 v_2 \cdot v_i + \cdots + \alpha_k v_k \cdot v_i = \alpha_i v_i \cdot v_i = \alpha_i$.

Twierdzenie

Każda podprzestrzeń $V \subset \mathbb{R}^n$ ma bazę ortonormalną

Przykład

Niech $V \subset \mathbb{R}^3$, $V : x_1 + x_2 - x_3 = 0$. Znajdujemy najpierw bazę ortogonalną w V. Metoda: indukcyjnie dobieramy wektory prostopadłe do już wybranych.Weźmy np. $v_1' = (1, 0, 1) \in V$. Szukamy takiego niezerowego wektora $v_2' = (x_1, x_2, x_3) \in V$, że $v_2' \perp v_1'$.

Tzn.$\begin{cases} x_1 & & +x_3 & = 0 \\ x_1 & +x_2 & -x_3 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & & +x_3 & = 0 \\ & x_2 & -2x_3 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x_1 & = -x_3 \\ x_2 & = 2x_3 \end{cases}$. Np. $v_2' = (-1, 2, 1)$. Wiemy, że $\dim V = 2$, zatem v_1', v_2' tworzą bazę ortogonalną V. Wystarczy ja unormować:

$v_1 = \frac{1}{||v_1'||} v_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$, $v_2 = \frac{1}{||v_2'||} v_2' = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, 2, 1)$ tworzą bazę ortonormalną V.

Rzut prostopadły na przestrzeń i symetrie

Twierdzenie

Niech $V \subset \mathbb{R}^n$ będzie podprzestrzenia liniową. Dowolny wektor $w \in \mathbb{R}^n$ można wówczas jednoznacznie przedstawić jako sumę $w = v + u$ wektorów $v \in V$ i $u \in V^\perp$. Przyporządkowanie $P_V : w \mapsto v$ jest wówczas endomorfizmem $\mathbb{R}^n$ nazywanym rzutem prostopadłym na V.

Rzut prostopadły na przestrzeń i symetrie

Twierdzenie

Niech $V \subset \mathbb{R}^n$ będzie podprzestrzenia liniową. Dowolny wektor $w \in \mathbb{R}^n$ można wówczas jednoznacznie przedstawić jako sumę $w = v + u$ wektorów $v \in V$ i $u \in V^\perp$. Przyporządkowanie $P_V : w \mapsto v$ jest wówczas endomorfizmem $\mathbb{R}^n$ nazywanym rzutem prostopadłym na V.

Uwaga Przy oznaczeniach z powyższego twierdzenia, mamy $u = P_{V^\perp}(w)$

Rzut prostopadły na przestrzeń i symetrie

Twierdzenie

Niech $V \subset \mathbb{R}^n$ będzie podprzestrzenia liniową. Dowolny wektor $w \in \mathbb{R}^n$ można wówczas jednoznacznie przedstawić jako sumę $w = v + u$ wektorów $v \in V$ i $u \in V^{\perp}$. Przyporządkowanie $P_V : w \mapsto v$ jest wówczas endomorfizmem $\mathbb{R}^n$ nazywanym rzutem prostopadłym na V.

Uwaga Przy oznaczeniach z powyższego twierdzenia, mamy $u = P_{V^\perp}(w)$

Definicja

Endomorfizm $S_V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zdefiniowany przez $S_V(w) = P_V(w) - P_{V^\perp}(w) = 2P_V(w) - w$ nazywamy symetrią prostopadłą względem V.

Przykład

Niech wektor niezerowy $z \in \mathbb{R}^n$ niech $V = lin(z)$. Dla $w \in \mathbb{R}^n$ oznaczając $v = P_V(w)$ mamy $v = \alpha z$ oraz $z \perp (w - v)$ czyli $z \cdot (w - \alpha z) = 0$. Stąd $z \cdot w - z \cdot (\alpha z) = z \cdot w - \alpha z \cdot z = 0$, czyli $\alpha = \frac{w \cdot z}{z \cdot z}$. Zatem $P_V(w) = \frac{w \cdot z}{z \cdot z} z$

Przykład

Niech wektor niezerowy $z \in \mathbb{R}^n$ niech $V = lin(z)$. Dla $w \in \mathbb{R}^n$ oznaczając $v = P_V(w)$ mamy $v = \alpha z$ oraz $z \perp (w - v)$ czyli $z \cdot (w - \alpha z) = 0$. Stąd $z \cdot w - z \cdot (\alpha z) = z \cdot w - \alpha z \cdot z = 0$, czyli $\alpha = \frac{w \cdot z}{z \cdot z}$. Zatem $P_V(w) = \frac{w \cdot z}{z \cdot z} z$

Twierdzenie

Niech $V \subset \mathbb{R}^n$, będzie podprzestrzenią liniową. Wtedy:
a) $P_V(w) \in V$ dla $w \in \mathbb{R}^n$ oraz $P_V(v) = v$ dla $v \in V$.

Przykład

Niech wektor niezerowy $z \in \mathbb{R}^n$ niech $V = lin(z)$. Dla $w \in \mathbb{R}^n$ oznaczając $v = P_V(w)$ mamy $v = \alpha z$ oraz $z \perp (w - v)$ czyli $z \cdot (w - \alpha z) = 0$. Stąd $z \cdot w - z \cdot (\alpha z) = z \cdot w - \alpha z \cdot z = 0$, czyli $\alpha = \frac{w \cdot z}{z \cdot z}$. Zatem $P_V(w) = \frac{w \cdot z}{z \cdot z} z$

Twierdzenie

Niech $V \subset \mathbb{R}^n$, będzie podprzestrzenią liniową. Wtedy:
a) $P_V(w) \in V$ dla $w \in \mathbb{R}^n$ oraz $P_V(v) = v$ dla $v \in V$.
b) Wektor $P_V(w)$ jest jedynym takim wektorem $v \in V$, który minimalizuje na V wyrażenie $||w - v||$ (czyli jest najbliższym do w wektorem z V)

Przykład

Niech wektor niezerowy $z \in \mathbb{R}^n$ niech $V = lin(z)$. Dla $w \in \mathbb{R}^n$ oznaczając $v = P_V(w)$ mamy $v = \alpha z$ oraz $z \perp (w - v)$ czyli $z \cdot (w - \alpha z) = 0$. Stąd $z \cdot w - z \cdot (\alpha z) = z \cdot w - \alpha z \cdot z = 0$, czyli $\alpha = \frac{w \cdot z}{z \cdot z}$. Zatem $P_V(w) = \frac{w \cdot z}{z \cdot z} z$

Twierdzenie

Niech $V \subset \mathbb{R}^n$, będzie podprzestrzenią liniową. Wtedy:
a) $P_V(w) \in V$ dla $w \in \mathbb{R}^n$ oraz $P_V(v) = v$ dla $v \in V$.
b) Wektor $P_V(w)$ jest jedynym takim wektorem $v \in V$, który minimalizuje na V wyrażenie $||w - v||$ (czyli jest najbliższym do w wektorem z V)
c) Jeśli $\{v_1, \ldots, v_k\}$ jest baza ortogonalną V, to zachodzi
$P_V(w) = \frac{w \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 + \cdots + \frac{w \cdot v_k}{v_k \cdot v_k} v_k$

Przykład

Niech wektor niezerowy $z \in \mathbb{R}^n$ niech $V = lin(z)$. Dla $w \in \mathbb{R}^n$ oznaczając $v = P_V(w)$ mamy $v = \alpha z$ oraz $z \perp (w - v)$ czyli $z \cdot (w - \alpha z) = 0$. Stąd $z \cdot w - z \cdot (\alpha z) = z \cdot w - \alpha z \cdot z = 0$, czyli $\alpha = \frac{w \cdot z}{z \cdot z}$. Zatem $P_V(w) = \frac{w \cdot z}{z \cdot z} z$

Twierdzenie

Niech $V \subset \mathbb{R}^n$, będzie podprzestrzenią liniową. Wtedy:
a) $P_V(w) \in V$ dla $w \in \mathbb{R}^n$ oraz $P_V(v) = v$ dla $v \in V$.
b) Wektor $P_V(w)$ jest jedynym takim wektorem $v \in V$, który minimalizuje na V wyrażenie $||w - v||$ (czyli jest najbliższym do w wektorem z V)
c) Jeśli $\{v_1, \ldots, v_k\}$ jest baza ortogonalną V, to zachodzi $P_V(w) = \frac{w \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 + \cdots + \frac{w \cdot v_k}{v_k \cdot v_k} v_k$
d) Jeśli wektory $v_1, \ldots v_k$ tworzą bazę ortonormalną V to $P_V(w) = (w \cdot v_1)v_1 + \cdots + (w \cdot v_k)v_k$

Twierdzenie

Niech V będzie podprzestrzenią $\mathbb{R}^n$. Zachodzą następujące równości:
a) $P_V \circ P_V = P_V$

Twierdzenie

Niech V będzie podprzestrzenią $\mathbb{R}^n$. Zachodzą następujące równości:

a) $P_V \circ P_V = P_V$

b) $S_V \circ S_V = id_{\mathbb{R}^n}$

Twierdzenie

Niech V będzie podprzestrzenią $\mathbb{R}^n$. Zachodzą następujące równości:

a) $P_V \circ P_V = P_V$

b) $S_V \circ S_V = id_{\mathbb{R}^n}$

c)$P_V + P_{V^\perp} = id_{\mathbb{R}^n}$

Twierdzenie

Niech V będzie podprzestrzenią $\mathbb{R}^n$. Zachodzą następujące równości:

a) $P_V \circ P_V = P_V$

b) $S_V \circ S_V = id_{\mathbb{R}^n}$

c)$P_V + P_{V^\perp} = id_{\mathbb{R}^n}$

d) $S_{V^\perp} = -S_V$

Twierdzenie

Niech V będzie podprzestrzenią $\mathbb{R}^n$. Zachodzą następujące równości:
a) $P_V \circ P_V = P_V$
b) $S_V \circ S_V = id_{\mathbb{R}^n}$
c)$P_V + P_{V^\perp} = id_{\mathbb{R}^n}$
d) $S_{V^\perp} = -S_V$
e) Jeśli $v_1, \dots v_k$ *jest bazą ortogonalną* V *to* $P_V = P_{v_1} + \cdots + P_{v_k}$,
gdzie oznaczyliśmy $P_v = P_{lin(v)}$, *dla* $v \in \mathbb{R}^n$

Twierdzenie

Niech V będzie podprzestrzenią $\mathbb{R}^n$. Zachodzą następujące równości:

a) $P_V \circ P_V = P_V$

b) $S_V \circ S_V = id_{\mathbb{R}^n}$

c)$P_V + P_{V^\perp} = id_{\mathbb{R}^n}$

d) $S_{V^\perp} = -S_V$

e) Jeśli $v_1, \dots v_k$ *jest bazą ortogonalną* V *to* $P_V = P_{v_1} + \dots + P_{v_k}$*,*
gdzie oznaczyliśmy $P_v = P_{lin(v)}$*, dla* $v \in \mathbb{R}^n$

Przykład

Czasami używamy c) w następujący sposób: Niech $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 0\} \subset \mathbb{R}^4$, niech $w = (1, 2, 3, 4)$. Obliczyć $P_v(w)$. Zamiast liczyć rzut z definicji możemy skorzystać z tego, że $V^\perp = lin((1, 1, 1, -2))$. Zatem

$$P_V(w) = w - P_{V^\perp}(w) = w - \frac{w \cdot (1,1,1,-2)}{1^2+1^2+1^2+(-2)^2}(1, 1, 1, -2) =$$

$$(1, 2, 3, 4) - \frac{1\cdot 1+2\cdot 1+3\cdot 1+4\cdot(-2)}{7}(1, 1, 1, -2) = (1\tfrac{2}{7}, 2\tfrac{2}{7}, 3\tfrac{2}{7}, 3\tfrac{3}{7})$$

Ortogonalizacja Grama-Schmidta

Twierdzenie

Niech wektory $v_1, \ldots, v_k$ *tworzą bazę podprzestrzeni* $V \subset \mathbb{R}^n$*.*
Zdefiniujmy indukcyjnie wektory $w_1, \ldots, w_k$ *oraz przestrzenie* $W_1, \ldots, W_k$ *następująco*
(i) $w_1 = v_1$*,* $W_1 = lin(w_1)$*,*
(ii)Jeśli w_{i-1} *oraz* W_{i-1} *są już zdefiniowane, to* $w_i = v_i - P_{W_{i-1}}(v_i)$*,* $W_i = lin(w_1, \ldots, w_i)$ *dla* $i = 2, \ldots, k$*.*
Wówczas wektory $w_1, \ldots, w_i$ *tworzą bazę ortogonalną* W_i*,* $W_i = lin(v_1, \ldots, v_i)$*, dla* $i = 1, \ldots, k$ *oraz* $W_k = V$*, czyli wektory* $w_1, \ldots, w_k$ *tworzą bazę ortogonalną* V*. Po zastąpieniu każdego z wektorów* w_i *przez jego unormowanie* $u_i = \frac{w_i}{||w_i||}$ *otrzymujemy odpowiednie bazy ortonormalne.*