Diagonalizacja macierzy i jej zastosowania

Mirosław Sobolewski

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW

9. wykład z algebry liniowej
Warszawa, listopad 2009

Definicja

Macierz $A = [a_{ij}] \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ *nazywamy* *diagonalną jeśli dla każdej pary różnych indeksów* i, j*,(tzn.* $i \neq j$*),* $a_{ij} = 0$*, tzn. gdy*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Przykład

Macierze diagonalne

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Twierdzenie

Niech $\varphi : V \to V$ będzie endomorfizmem przestrzeni liniowej V, zaś $\mathcal{A} = v_1, \ldots, v_n$ niech będzie bazą V. Wówczas $M(\varphi)_{\mathcal{A}}$ jest diagonalna $\Leftrightarrow$ każdy wektor bazy $\mathcal{A}$ jest wektorem własnym endomorfizmu φ. Przy tym, jeśli A jest diagonalna to a_{ii} jest wartością własną odpowiadającą v_i, tzn., $\varphi(v_i) = a_{ii} v_i$.

Dowód:na tablicy

Przykład

Niech $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, będzie określone przez $\varphi((x_1, x_2)) = (x_1 - 3x_2, x_1 + 5x_2)$.

$$m(\varphi)_{st} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \; w_\varphi = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 1 & 5-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(5-\lambda)+3 =,$$

$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 2)(\lambda - 4)$, skąd wartości własne $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$.
Wyznaczamy podprzestrzenie własne:

$$V_{(2)} : \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1 = -3x_2,$$

czyli $V_{(2)} = \{(-3x_2, x_2) | x_2 \in \mathbb{R}\} = lin((-3, 1))$

$$V_{(4)} : \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1 = -x_2,$$

czyli $V_{(4)} = \{(-x_2, x_2) | x_2 \in \mathbb{R}\} = lin((-1, 1))$

Przykład

cd. Układ $\mathcal{A} = ((-3,1),(-1,1))$ jest bazą $\mathbb{R}^2$,

$$M(\varphi)_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},$$

gdyż $\varphi((-3,1)) = 2(-3,1) + 0(-1,1)$,
$\varphi((-1,1)) = 0(-3,1) + 4(-1,1)$

Twierdzenie

Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ oznacza k różnych wartości własnych endomorfizmu $\varphi : V \to V$ przestrzeni liniowej V, zaś $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_k$ niech stanowią k takich liniowo niezależnych układów wektorów z V, że jeśli v należy do $\mathcal{A}_i$ to $\varphi(v) = \alpha_i v$, dla $i = 1, \ldots, k$. Wówczas układ $\mathcal{A}$ powstały z połączenia układów $\mathcal{A}_i$ w jeden jest liniowo niezależny.

Wniosek

Niech V – n-wymiarowa przestrzeń liniowa, $\varphi : V \to V$ – endomorfizm, $\alpha_1, \ldots, \alpha_s \in \mathbb{R}$ wszystkie (parami różne) wartości własne endomorfizmu φ. Wówczas:
(i) Jeśli $v_1 \ldots, v_s \in V$ oraz dla $i = 1, \ldots, s$ zachodzi $\varphi(v) = \alpha_i v$ to układ $v_1, \ldots, v_s$ jest liniowo niezależny.
(ii) $\dim V_{(\alpha_1)} + \ldots + \dim V_{(\alpha_s)} \leq \dim V$.
(iii) $\dim V_{(\alpha_1)} + \ldots + \dim V_{(\alpha_s)} = \dim V \Leftrightarrow$ istnieje baza przestrzeni V złożona z wektorów własnych endomorfizmu φ.

Uwaga: Jako bazę w części (iii) powyższego twierdzenia wystarczy wziąć układ powstały z połączenia baz poszczególnych $V_{(\alpha_i)}$.

Przykład

Niech endomorfizm$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie określony wzorem
$\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + x_2, 3x_2 + x_3, 2x_3)$.

Przykład (cd)

$$M(\varphi)_{st} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad w_\varphi = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} =$$

$(2-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) = (2-\lambda)^2(3-\lambda)$. Wartości własne: 2,3.

$$V_{(2)} : \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, x_2 = 0, x_3 = 0,$$

$V_{(2)} = \{(x_1, 0, 0) | x_3 \in \mathbb{R}\} = lin((1, 0, 0))$

$$V_{(3)} : \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, x_1 = x_2, x_3 = 0,$$

$V_{(3)} = lin((1, 1, 0))$. $\dim V_{(2)}$+$\dim V_{(3)} = 1 + 1 = 2 \neq 3 =$dim $\mathbb{R}^3$. Zatem dla żadnej bazy $\mathcal{A}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ macierz $M(\varphi)_{\mathcal{A}}$ nie jest diagonalna.

Wniosek

Niech V przestrzeń liniowa, $\dim V = n$. Jeśli endomorfizm $\varphi : V \to V$ ma n różnych wartości własnych to istnieje w V baza złożona z wektorów własnych φ.

Definicja

Mówimy, że macierz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ jest diagonalizowalna, jeśli A jest podobna do macierzy diagonalnej należącej do $M_{n\times n}(\mathbb{R})$, tzn. jeśli istnieje taka macierz odwracalna $C \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, że macierz $C^{-1}AC$ jest diagonalna.

Twierdzenie

Macierz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ jest diagonalizowalna $\Leftrightarrow$ dla endomorfizmu $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zadanego warunkiem $M(\varphi)_{st} = A$ istnieje baza przestrzeni $\mathbb{R}^n$ złożona z wektorów własnych endomorfizmu φ. Ponadto, jeśli $\mathcal{A}$ jest taką bazą to dla $C = M(id)^{st}_{\mathcal{A}}$ macierz $C^{-1}AC$ jest diagonalna.

Przykład

1. Macierz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

jest diagonalizowalna. Endomorfizm $\varphi((x_1, x_2)) = (x_1 - 3x_2, x_1 + 5x_2)$ ma dwie wartości własne 2 oraz 4. Wyliczyliśmy $V_{(2)} = lin((-3, 1))$, $V_{(4)} = lin((-1, 1))$. Dla $\mathcal{A} = ((-3, 1), (-1, 1))$ przyjmując $C = M(id)^{st}_{\mathcal{A}}$ mamy

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = M(\varphi)_{\mathcal{A}} = M(id)^{\mathcal{A}}_{st} M(\varphi)^{st}_{st} M(id)^{st}_{\mathcal{A}} = C^{-1}AC,$$

zaś

$$C = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ oraz } C^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{bmatrix}$$

.

Przykład

2. Macierz

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$ nie jest diagonalizowalna,

bo dla endomorfizmu $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, określonego przez $\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + x_2, 3x_2 + x_3, 2x_3)$ nie ma bazy $\mathbb{R}^3$ złożonej z wektorów własnych φ.

Zastosowanie

Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Podać wzór na A^n. Stosując oznaczenia przykładu 1. mamy $A = CDC^{-1}, \;\; A^n = (CDC^{-1})^n = CD^nC^{-1} =$

$$C \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}^n \cdot C^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2^{n-1}(3-2^n) & 3 \cdot 2^{n-1}(1-2^n) \\ 2^{n-1}(2^n-1) & 3 \cdot 2^{n-1}(2^n-1) \end{bmatrix}$$

Uwaga:

Macierze symetryczne , tzn. takie macierze $A = [a_{ij}] \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, że $a_{ij} = a_{ji}$ czyli $A^\top = A$ są diagonalizowalne.

Przykład

Macierz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$ jest symetryczna, więc jest diagonalizowalna

Przykład

Macierze $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ nie są podobne, gdyż mają różne wielomiany charakterystyczne. Macierze $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ oraz $D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ są podobne, gdyż sa diagonalizowalne i mają te same wartości własne z tymi samymi krotnościami. Macierze $E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ oraz $F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ mają te same wielomiany charakterystyczne, a zatem te same wartości własne (z krotnościami), ale nie są podobne. F jest diagonalizowalna, E – nie.