

Diagonalizacja macierzy i jej zastosowania

Mirosław Sobolewski

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW

9. wykład z algebry liniowej
Warszawa, grudzień 2011

Definicja

Macierz $A = [a_{ij}] \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ nazywamy **diagonalną** jeśli dla każdej pary różnych indeksów i, j , (tzn. $i \neq j$), $a_{ij} = 0$, tzn. gdy

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Definicja

Macierz $A = [a_{ij}] \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ nazywamy **diagonalną** jeśli dla każdej pary różnych indeksów i, j , (tzn. $i \neq j$), $a_{ij} = 0$, tzn. gdy

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Przykład

Macierze diagonalne

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Twierdzenie

Niech $\varphi : V \rightarrow V$ będzie endomorfizmem przestrzeni liniowej V , zaś $\mathcal{A} = v_1, \dots, v_n$ niech będzie bazą V . Wówczas $M(\varphi)_{\mathcal{A}}$ jest diagonalna \Leftrightarrow każdy wektor bazy \mathcal{A} jest wektorem własnym endomorfizmu φ . Przy tym, jeśli A jest diagonalna to a_{ij} jest wartością własną odpowiadającą v_j , tzn., $\varphi(v_j) = a_{jj}v_j$.

Dowód:na tablicy

Przykład

Niech endomorfizm $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, będzie określony przez $\varphi((x_1, x_2)) = (x_1 - 3x_2, x_1 + 5x_2)$.

$$m(\varphi)_{st} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad w_\varphi = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & -3 \\ 1 & 5 - \lambda \end{bmatrix} = (1 - \lambda)(5 - \lambda) + 3 =,$$

$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 2)(\lambda - 4)$, skąd wartości własne $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$.

Wyznaczamy podprzestrzenie własne:

$$V_{(2)} : \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1 = -3x_2,$$

czyli $V_{(2)} = \{(-3x_2, x_2) \mid x_2 \in \mathbb{R}\} = \text{lin}((-3, 1))$

$$V_{(4)} : \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow x_1 = -x_2,$$

czyli $V_{(4)} = \{(-x_2, x_2) \mid x_2 \in \mathbb{R}\} = \text{lin}((-1, 1))$

Przykład

cd. Układ $\mathcal{A} = ((-3, 1), (-1, 1))$ jest bazą \mathbb{R}^2 ,

$$M(\varphi)_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},$$

gdyż $\varphi((-3, 1)) = 2(-3, 1) + 0(-1, 1)$,
 $\varphi((-1, 1)) = 0(-3, 1) + 4(-1, 1)$

Przykład

cd. Układ $\mathcal{A} = ((-3, 1), (-1, 1))$ jest bazą \mathbb{R}^2 ,

$$M(\varphi)_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},$$

gdyż $\varphi((-3, 1)) = 2(-3, 1) + 0(-1, 1)$,

$\varphi((-1, 1)) = 0(-3, 1) + 4(-1, 1)$

Twierdzenie

Niech $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ oznaczają k różnych wartości własnych endomorfizmu $\varphi : V \rightarrow V$ przestrzeni liniowej V , zaś $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k$ niech stanowią k takich liniowo niezależnych układów wektorów z V , że jeśli v należy do \mathcal{A}_i to $\varphi(v) = \alpha_i v$, dla $i = 1, \dots, k$. Wówczas układ \mathcal{A} powstały z połączenia układów \mathcal{A}_i w jeden jest liniowo niezależny.

Wniosek

Niech V – n -wymiarowa przestrzeń liniowa, $\varphi : V \rightarrow V$ – endomorfizm, $\alpha_1, \dots, \alpha_s \in \mathbb{R}$ wszystkie (parami różne) wartości własne endomorfizmu φ . Wówczas:

- (i) Jeśli $v_1, \dots, v_s \in V$ oraz dla $i = 1, \dots, s$ zachodzi $\varphi(v_i) = \alpha_i v_i$ to układ v_1, \dots, v_s jest liniowo niezależny.
- (ii) $\dim V_{(\alpha_1)} + \dots + \dim V_{(\alpha_s)} \leq \dim V$.
- (iii) $\dim V_{(\alpha_1)} + \dots + \dim V_{(\alpha_s)} = \dim V \Leftrightarrow$ istnieje baza przestrzeni V złożona z wektorów własnych endomorfizmu $\varphi \Leftrightarrow$ endomorfizm φ ma w pewnej bazie macierz diagonalną.

Uwaga: Jako bazę w części (iii) powyższego twierdzenia wystarczy wziąć układ powstały z połączenia baz poszczególnych $V_{(\alpha_i)}$.

Przykład

Niech endomorfizm $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ będzie określony wzorem $\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + x_2, 3x_2 + x_3, 2x_3)$.

Przykład (cd)

$$M(\varphi)_{st} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad w_\varphi = \det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 3 - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{bmatrix} =$$

$(2 - \lambda)(3 - \lambda)(2 - \lambda) = (2 - \lambda)^2(3 - \lambda)$. Wartości własne: 2, 3.

$$V_{(2)} : \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, x_2 = 0, x_3 = 0,$$

$$V_{(2)} = \{(x_1, 0, 0) \mid x_1 \in \mathbb{R}\} = \text{lin}((1, 0, 0))$$

$$V_{(3)} : \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, x_1 = x_2, x_3 = 0,$$

$V_{(3)} = \text{lin}((1, 1, 0))$. $\dim V_{(2)} + \dim V_{(3)} = 1 + 1 = 2 \neq 3 = \dim \mathbb{R}^3$. Zatem dla żadnej bazy \mathcal{A} przestrzeni \mathbb{R}^3 macierz $M(\varphi)_{\mathcal{A}}$ nie jest diagonalna.

Wniosek

Niech V przestrzeń liniowa, $\dim V = n$. Jeśli endomorfizm $\varphi : V \rightarrow V$ ma n różnych wartości własnych to istnieje w V baza złożona z wektorów własnych φ .

Definicja

Mówimy, że macierz $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ jest **diagonalizowalna**, jeśli A jest podobna do macierzy diagonalnej należącej do $M_{n \times n}(\mathbb{R})$, tzn. jeśli istnieje taka macierz odwracalna $C \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, że macierz $C^{-1}AC$ jest diagonalna.

Twierdzenie

Macierz $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ jest diagonalizowalna \Leftrightarrow dla endomorfizmu $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ zadanego warunkiem $M(\varphi)_{st} = A$ istnieje baza przestrzeni \mathbb{R}^n złożona z wektorów własnych endomorfizmu φ . Ponadto, jeśli \mathcal{A} jest taką bazą to dla $C = M(\text{id})_{\mathcal{A}}^{st}$ macierz $C^{-1}AC$ jest diagonalna.

Przykład

1. Macierz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

jest diagonalizowalna. Endomorfizm $\varphi((x_1, x_2)) = (x_1 - 3x_2, x_1 + 5x_2)$ ma dwie wartości własne 2 oraz 4. Wylczyliśmy $V_{(2)} = \text{lin}((-3, 1))$, $V_{(4)} = \text{lin}((-1, 1))$. Dla $\mathcal{A} = ((-3, 1), (-1, 1))$ przyjmując $C = M(\text{id})_{\mathcal{A}}^{\text{st}}$ mamy

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = M(\varphi)_{\mathcal{A}} = M(\text{id})_{\text{st}}^{\mathcal{A}} M(\varphi)_{\text{st}}^{\text{st}} M(\text{id})_{\mathcal{A}}^{\text{st}} = C^{-1}AC,$$

zaś

$$C = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ oraz } C^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{bmatrix}$$

Przykład

2. Macierz

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ nie jest diagonalizowalna,}$$

bo dla endomorfizmu $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, określonego przez $\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + x_2, 3x_2 + x_3, 2x_3)$ nie ma bazy \mathbb{R}^3 złożonej z wektorów własnych φ .

Zastosowanie

Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Podać wzór na A^n . Stosując oznaczenia przykładu 1. mamy

$$A = CDC^{-1}, \quad A^n = (CDC^{-1})^n = CD^nC^{-1} =$$

$$C \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}^n \cdot C^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} 2^{n-1}(3 - 2^n) & 3 \cdot 2^{n-1}(1 - 2^n) \\ 2^{n-1}(2^n - 1) & 3 \cdot 2^{n-1}(2^n - 1) \end{bmatrix}$$

Twierdzenie

Jeśli wielomian charakterystyczny w_M macierzy M stopnia n ma n różnych pierwiastków to macierz M jest diagonalizowalna.

Twierdzenie

Jeśli wielomian charakterystyczny w_M macierzy M stopnia n ma n różnych pierwiastków to macierz M jest diagonalizowalna.

Przykład macierzy $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ wskazuje, że niekoniecznie na odwrót.

Twierdzenie

Jeśli wielomian charakterystyczny w_M macierzy M stopnia n ma n różnych pierwiastków to macierz M jest diagonalizowalna.

Przykład macierzy $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ wskazuje, że niekoniecznie na

odwrót. **Uwaga:** Macierz $A = [a_{ij}] \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ nazywamy macierzą **symetryczną**, jeśli $a_{ij} = a_{ji}$ czyli $A^T = A$.

Twierdzenie

Macierze symetryczne są diagonalizowalne.

Przykład

Macierz

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ jest symetryczna, więc jest diagonalizowalna

Przykład

Macierze $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ nie są podobne, gdyż

mają różne wielomiany charakterystyczne. Macierze $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

oraz $D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ są podobne, gdyż są diagonalizowalne i mają te same wartości własne z tymi samymi krotnościami. Macierze

$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ oraz $F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ mają te same wielomiany

charakterystyczne, a zatem te same wartości własne (z krotnościami), ale nie są podobne. F jest diagonalizowalna, E – nie.

Przykład

Macierze $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ nie są podobne, gdyż

mają różne wielomiany charakterystyczne. Macierze $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

oraz $D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ są podobne, gdyż są diagonalizowalne i mają te same wartości własne z tymi samymi krotnościami. Macierze

$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ oraz $F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ mają te same wielomiany

charakterystyczne, a zatem te same wartości własne (z krotnościami), ale nie są podobne. F jest diagonalizowalna, E – nie.

Twierdzenie

Jeśli macierze A i B są podobne, i macierz A spełnia po podstawieniu za X równanie $a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0 I = \mathbf{0}$, gdzie $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{R}$, to B spełnia również to samo równanie po podstawieniu za X .

Przykład

Macierzą obrotu o kąt $\pi/2$ w bazie standardowej jest $M = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Możemy sprawdzić, że spełnia ona równanie $X^2 + I = \mathbf{0}$. Natomiast

macierz $N = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$ (macierz obrotu o kąt $\pi/4$) nie

spełnia tego równania. Macierze M i N nie są więc podobne.