Wstęp do przestrzeni metrycznych i topologicznych oraz ich zastosowań w ekonomii

Mirosław Sobolewski

25 maja 2010

Definicja. Przestrzenią metryczną nazywamy zbiór X z funkcją $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ przyporządkowującą każdej parze elementów (punktów) $x, y \in X$ liczbę rzeczywistą $\rho(x, y)$ nazywaną *odległością* pomiędzy x i y, tak, by spełnione były warunki:

1. $\rho(x, y) \geq 0$ oraz $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (symetria)
3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (nierówność trójkąta)

   Samą funkcję ρ nazywa się wówczas *metryką.*

   Definicja Niech X będzie przestrzenią metryczną z metryką ρ, niech x będzie punktem X zaś r dodatnią liczbą rzeczywistą. *Kulą otwartą* o środku x i promieniu r nazwiemy zbiór $B(x, r) = \{y \in X : \rho(x, y) < r\}$. *Kulą domkniętą* o środku x promieniu r nazwiemy zbiór $\overline{B}(x, r) = \{y \in X : \rho(x, y) \leq r\}$. *Sferą* ośrodku x i promieniu r nazwiemy zbiór $S(x, r) = \{y \in X : \rho(x, y) = r\}$

   Definicja Podzbiór przestrzeni metrycznej nazywamy zbiorem *ograniczonym* jeśli zawiera się w pewnej kuli.

   Zadanie domowe. Taksonomia Wrocławska. Wybrać populację X złożoną z ok. 14-17 obiektów (np. województwa Polski, stare kraje UE, itp.) określić temat badania (np. warunki życia, pozycja ekonomiczna lub polityczna kraju). Stosownie do tematu wyróżnić 4-5 cech wyrażających się liczbami rzeczywistymi (np. oczekiwana długość życia, dochód narodowy p.c., liczebność armii). Zestandaryzować (unormować) wybrane cechy w populacji. Wyznaczyć odległości pomiędzy obiektami uwzględniające wybrane zestandaryzowane cechy (np. według wzoru $\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |\overline{x}_i - \overline{y}_i|$, gdzie x, y to dwa obiekty wybranej populacji, n – liczba cech, zaś $\overline{x}_i, \overline{y}_i$ zestandaryzowane cechy o numerze i odpowiednio obiektu x i y). Na podstawie uzyskanej tabeli odległości skonstruować graf Taksonomii Wrocławskiej. Zinterpretować uzyskany graf. Opis Taksonomii Wrocławskiej znaleźć można w [St], str. 122-126.

Niech X będzie przestrzenią metryczną z metryką ρ.

Definicja Powiemy, że ciąg punktów $x_n \in X$ jest *zbieżny* i *dąży do granicy* $x \in X$ jeśli $\lim \rho(x_n, x) = 0$.

Definicja Niech $A \subset X$. Liczbę $diam(A) = \sup\{\rho(x,y) : x, y \in A\}$ nazywamy *średnicą* A.

Definicja Ciąg punktów $x_n \in X$ nazwiemy *ciągiem Cauchy'ego* jeśli $diam\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2} \dots\} \to 0$ wraz z $n \to \infty$.

Definicja Przestrzeń X nazywamy przestrzenią *zupełną* jeśli każdy ciąg Cauchy'ego w X jest ciągiem zbieżnym.

Definicja Przekształcenie $f : X \to X$ nazywamy *zwężającym* (*kontrakcją*) jeśli istnieje taka dodatnia liczba $c < 1$, że $\rho(f(x), f(y) \leq c\rho(x,y)$ dla dowolnych dwóch punktów $x, y \in X$ (liczbę c nazywamy *stałą zwężenia* f).

Twierdzenie (Zasada Banacha). Niech X będzie przestrzenią zupełną, zaś $f : X \to X$ niech będzie przekształceniem zwężającym. Wówczas istnieje dokładnie jeden punkt $\overline{x} \in X$ spełniający $f(\overline{x}) = \overline{x}$ (punkt taki nazywamy*punktem stałym* przekształcenia f).

Przy tym, jeśli x_0 jest pewnym punktem X i zdefiniujemy ciąg $x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), x_3 = f(x_2), \dots, x_n = f(x_{n-1}), \dots$ to $\lim x_n = \overline{x}$ oraz (*) $\rho(x_n, \overline{x}) \leq \rho(x_0, x_1)\frac{c^n}{1-c}$, gdzie c oznacza stałą zwężenia f.

Zadanie domowe Niech $X = C([0,1], \mathbb{R})$ będzie przestrzenią wszystkich funkcyj ciągłych rzeczywistych określonych na odcinku $[0,1]$. W przestrzeni tej określamy metrykę zupełną wzorem $\rho(f,g) = \max\{e^{-Lt}|f(t) - g(t)|$, gdzie $L > 0$ jest pewną stałą, której znaczenie dalej objaśnimy. Niech $K : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą i lipschitzowską względem drugiej zmiennej ze stałą L, tzn. $|K(t,u) - K(t,v)| \leq L|u-v|$ dla $t \in [0,1], u, v \in \mathbb{R}$. Można pokazać (np. [D-G]), że wówczas przekształcenie $F : X \to X$ opisane wzorem $F(f)(t) = v(t) + \int_0^t K(s, f(s))ds$ jest zwężające ze stałą $c = 1 - e^{-L}$, i na mocy Zasady Banacha ma punkt stały $\overline{f}$. Ten punkt stały jest rozwiązaniem równania całkowego $\overline{f}(t) = v(t) + \int_0^t K(s, \overline{f}(s))ds$. Ponadto kolejne przybliżenia można oszacować stosując wzór (*). Korzystając z tego oszacowania określić ile razy należy zastosować przekształcenie F aby otrzymać rozwiązanie równania całkowego $f(t) = \int_0^t K(s, f(s))ds$, gdzie $K(t, u) = at^2 + bt + c + d(\cos u)$ z dokładnością 10^{-6}. Liczby a,b,c,d, należy uzyskać jako 4 pierwsze cyfry numeru własnego indeksu, przy czym jeśli cyfrą byłoby 0 należy ją zastąpić cyfrą 1. Przy szacowaniu można posłużyć się ocenami zgrubnymi.

Definicja Zbiór X z wyróżnioną rodziną jego podzbiorów $\mathcal{T}$ (nazywanych wówczas zbiorami *otwartymi*) jest przestrzenią topologiczną jeśli spełnione są następujące warunki:

i) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$, tzn. zbiór pusty oraz cała przestrzeń X są zbiorami otwartymi

ii) jeśli $U, V \in \mathcal{T}$ to również $U \cap V \in \mathcal{T}$, tzn. iloczyn (czyli przecięcie) dwu (a więc również skończonej liczby) zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym

iii) jeśli $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ to $\bigcup \mathcal{S} \in \mathcal{T}$, tzn. suma dowolnej rodziny zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.

Rodzinę $\mathcal{T}$ nazywamy wtedy *topologią* na X.

Przykłady. 1. Każda przestrzeń metryczna jest przestrzenią topologiczną jeśli przyjąć za $\mathcal{T}$ tzn. rodzinę zbiorów otwartych rodzinę złożoną ze zbioru pustego, oraz takich podzbiorów $U \subset X$, które wraz z każdym punktem $x \in U$ zawierają pewną kulę $B(x, r)$ (tzn. $B(x, r) \subset U$ dla pewnego $r > 0$). Rodzinę $\mathcal{T}$ nazywamy wówczas topologią *wyznaczoną przez metrykę*. Jeśli inaczej nie zaznaczymy, będziemy domyślnie przyjmować, że w przestrzeni metrycznej jest określona właśnie taka topologia.

2. Jeśli X jest przestrzenią topologiczną z topologią $\mathcal{T}$ zaś $Y \subset X$ to wówczas rodzina $\mathcal{T}_Y = \{U \cap Y : U \in \mathcal{T}\}$ tworzy topologię w Y nazywaną topologią *odziedziczoną* po X. Zatem zbiory otwarte w tej topologii to przecięcia z Y zbiorów otwartych w X. Samą przestrzeń Y nazywamy wtedy *podprzestrzenią* przestrzeni X.

3. Dla dowolnego zbioru X rodzina $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ jest topologią – jedynymi zbiorami otwartymi sa więc tu zbiór pusty i cała przestrzeń X. Taką topologię nazywamy *antydyskretną*.

Definicja Podzbiór F przestrzeni topologicznej X nazywamy zbiorem *domkniętym* jeśli jego dopełnienie $X \setminus F$ jest zbiorem otwartym (tzn. $X \setminus F \in \mathcal{T}$, gdzie $\mathcal{T}$ oznacza topologię w X)

Niech X oraz Y będą przestrzeniami topologicznymi.

Definicja Odwzorowanie (funkcję) $f : X \to Y$. nazwiemy jest przekształceniem ciągłym, jeśli dla dowolnego podzbioru otwartego $U \subset Y$ przeciwobraz $f^{-1}(U)$ jest otwartym podzbiorem X.

Definicja Przekształcenie $h : X \to Y$ nazwiemy *homeomorfizmem* jeśli h jest przekształceniem wzajemnie jednoznacznym (tzn. istnieje przekształcenie odwrotne $h^{-1} : Y \to X$) oraz zarówno h jak i h^{-1} są przekształceniami ciągłymi.

Przestrzenie X i Y nazywamy wówczas przestrzeniami *homeomorficznymi.* Np.cała przestrzeń $\mathbb{R}$ i jej podprzestrzeń $(-\pi/2, \pi/2)$ są homeomorficzne, gdyż $h : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ określone wzorem $h(x) = \tan x$ jest homeomorfizmem.

Własności topologiczne

Przestrzeń topologiczną X nazwiemy *niespójną* jeśli da się przedstawić jako suma $X = U \cup V$ swoich dwóch rozłacznych niepustych otwartych podzbiorów U i V.

Przestrzeń, która nie jest niespójna nazywamy przestrzenią *spójną.*

Twierdzenie Jeśli przestrzeń X jest spójna i $f : X \to Y$ jest przekształceniem ciągłym X **na** Y to Y jest również spójna. Krótko: obraz ciągły przestrzeni spójnej jest spójny.

Definicja Przestrzeń topologiczną X nazwiemy przestrzenią *Hausdorffa* jeśli dla dowolnych dwu różnych punktów $x, y \in X$ można dobrać rozłączne zbiory otwarte U i V, tak, by $x \in U$, $y \in V$. Przestrzenie Hausdorffa nazywa się również T_2 przestrzeniami.

Definicja *Pokryciem* zbioru(przestrzeni) A nazywamy taką rodzinę zbiorów, której suma zawiera A. Jeśli każdy element pokrycia jest zbiorem otwartym to mówimy, że pokrycie jest *otwarte.*

bf Definicja Przestrzeń topologiczną X nazywamy przestrzenią *zwartą* jeśli X jest przestrzenią Hausdorffa oraz z każdego pokrycia otwartego przestrzeni X można wybrać pokrycie skończone.

Twierdzenie. Przestrzeń metryczna jest zwarta$\Leftrightarrow$ z każdego ciągu w X można wybrać podciąg zbieżny.

Twierdzenie. Podprzestrzeń przestrzeni $\mathbb{R}^n$ jest zwarta $\Leftrightarrow$ jest podzbiorem domkniętym i ograniczonym.

Uwaga Nieskończona przestrzeń dyskretna (tzn. z metryką 0-1) jest ograniczona i domknięta w sobie. Nie jest jednak zwarta, gdyż zbiory jednopunktowe tworzą jej pokrycie otwarte, z którego nie można wybrać pokrycia skończonego.

Twierdzenie Obraz ciągły przestrzeni zwartej jest przestrzenią zwartą.
Twierdzenie Brouwera o punkcie stałym Niech $S \subset \mathbb{R}^n$ będzie sympleksem. Wówczas każde przekształcenie ciągłe $f : S \to S$ ma punkt stały, tzn. istnieje taki punkt $p \in S$, że $f(p) = p$

Własności, szczególnie własnosci przestrzeni metrycznych , które zachowują homeomorfizmy, nazywamy własnościami *topologicznymi.* Np. zwartość i spójność są własnościami topologicznymi. Ponieważ $\mathbb{R}$ jest zupełna i nieograniczona, zaś $(-\pi/2, \pi/2)$ jest ograniczoną i niezupełna przestrzenią zatem zarówno zupełność jak i ograniczoność nie są własnościami topologicznymi.

Lista pojęć i twierdzeń, które należy znać:

1. Definicja przestrzeni metrycznej.
2. Def. przestrzeni topologicznej.
3. Definicja zbioru domkniętego w przestrzeni topologicznej.
4. Def. Przekształceń ciągłych pomiędzy przestrzeniami topologicznymi.
5. Def. homeomorfizmu.
6. Def. przestrzeni Hausdorffa.
7. Def. Ciągu Cauchy'ego.
8. Definicja ciągu zbieżnego.
9. Def. Przestrzeni zupełnej.
10. Def. przestrzeni zwartej.
11. Zasada Banacha z definicją przekształcenia zwężającego (tj. kontrakcji).
12. Twierdzenie Brouwera o punkcie stałym.

Literatura

[Bol] Bołtiański,W.G, Jefremowicz, W.A *Zarys postawowych pojęć topologii*, PZWS, Warszawa 1965

[St] Hugon Steinhaus *Kalejdoskop matematyczny*, PZWS, 1956, Warszawa

[D-G] Dugunji, Granas *Fixed Point Theory*

[Kur] Kazimierz Kuratowski, *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, PWN, Warszawa 1980

[Eng-Siek] Engelking, R., Sieklucki, K. *Wstęp do topologii*, PWN, Warszawa 1986

[BE] Beno Eckmann *Social choice and topology*, dokument dostepny w internecie

Uzupełnienie