Schemat sprawdzianu

25 maja 2010

5 definicji i twierdzeń z listy 12(po 10 punktów) np.

1. Proszę sformułować twierdzenie Brouwera o punkcie stałym.

2. Niech X będzie przestrzenią topologiczną. Proszę określić, kiedy podzbiór $F \subset X$ jest podzbiorem domkniętym.

3. Niech X będzie zbiorem, niech $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$. Określić warunki, jakie musi spełniać funkcja ρ, aby była metryką.

4. Proszę określić, kiedy przekształcenie $h : X \to Y$, gdzie X, Y są przestrzeniami topologicznymi jest homeomorfizmem.

5. Niech X będzie przestrzenią metryczną. Proszę określić kiedy przekształcenie $f : X \to X$ jest zwężające i sformułować Zasadę Banacha.

10 pytań po 5 punktów. np.

1*. Proszę sformułować Prawo Walrasa i objaśnić występujące w nim terminy. Czy jest ono spełnione jedynie w warunkach równowagi rynkowej? Odp. Prawo Walrasa orzeka, że suma wartości popytów nadmiernych $g_i p_i$ wynosi zero, (czyli $\sum p_i g_i(p) = 0$), gdzie p_i oznacza cenę dobra o numerze i, zaś $g_i(p)$ nadmierny popyt na to dobro przy układzie cen $p = (p_1, \ldots, p_n)$, czyli różnicę między popytem i podażą tego dobra ($g_i = d_i - s_i$). Inaczej mówiąc wartość popytu całkowitego jest równa wartości całkowitej podaży. Prawo Walrasa jest spełnione niezależnie od tego czy gospodarka znajduje się w równowadze, czy też nie.

2. Na rysunku $Fig.1$ podany jest przykład podziału symplicjalnego sympleksu dwuwymiarowego, wraz z trzema kolorowaniami (numeracjami). Które z tych kolorowań jest (są) kolorowaniem Spernera? Czy istnieją takie kolorowania Spernera wierzchołków tego podziału aby liczba sympleksów podziału kompletnie pokolorowanych wynosiła dokładnie:

a) 3

b) 4

c) 17.

Odpowiedzi uzasadnić wskazując odpowiednie kolorowanie, bądź twierdzenie orzekające jego niemożliwość.

3. Podane są trzy podzbiory $A, B, C \subset \mathbb{R}^2$. Rozważmy 5 następujących własności: ograniczoność, domkniętość , otwartość, spójność, zwartość. Określić które z wymienionych własności mają one jako podzbiory i podprzestrzenie $\mathbb{R}^2$ ze zwykła metryką euklidesową, jeśli $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \geq 4\}$, $B = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, y > 0\}$, $C = \{(x, 0) : 0 \leq x \leq 2\} \cup \{(0, y) : 2 \leq y \leq 3\}$?

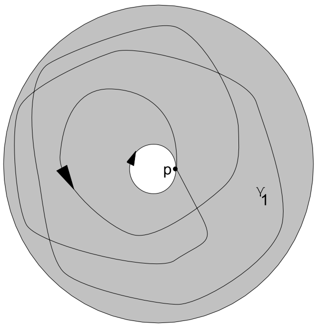
4. Podano trzy podprzestrzenie D, E, F przestrzeni $\mathbb{R}^2$. Określić, które z nich są homeomorficzne. jeśli $A = \{(x, 0) : 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(0, y) : 0 \leq y < 1\}$, $B = \{(x, 0) : 0 < x < 2\}$, $C = \{(x, 0) : -1 \leq x < 1\}$. Odpowiedź uzasadnić (homeomorfizm, jeśli istnieje, można opisać óbrazowo"). Odp. Wszystkie 3 przestrzenie są spójne, ale przestrzeń B jest rozcinana przez każdy jej punkt (tzn. po usunięciu dowolnego punktu staje się ona niespójna), zaś zarówno w A, jak i w C są punkty, które ich nie rozcinają. Przestrzeń C można przekształcić homeomorficznie na A zginając ją w punkcie $(0, 0)$. (Opis homeomorfizmu $h : C \to A$: $h((x, 0)) = (0, -x)$ dla $x \in (-1, 0]$ oraz $h((x, 0) = (x, 0)$ dla $x \in (0, 1])$. Zatem A i C są homeomorficzne, zaś B nie jest homeomorficzna z żadną z nich.

5. Na rysunku fig. 2 jest naszkicowana pętla γ_1 zaczepiona w punkcie p w pierścieniu P. Określić wykładnik n, tak, aby $[\gamma]^n = [\gamma_1]$ w grupie $\pi(P, p)$, gdzie γ oznacza pętlę zaczepioną w p, która jednokrotnie obiega wewnętrzny okrąg P zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Odp. $[\gamma_1] = [\gamma]^{-3}$ 6. Na rysunku fig. 3 naszkicowano 2 spójne grafy G_1 i G_2. Który z tych grafów jest jednobieżny, tzn. można go obejść w ten sposób aby przejść każdą krawędź dokładnie raz. Odpowiedź uzasadnić, powołując się na odpowiednią własność grafu, który nie jest jednobieżny i wskazując kolejność obchodzonych wierzchołków grafu jednobieżnego.

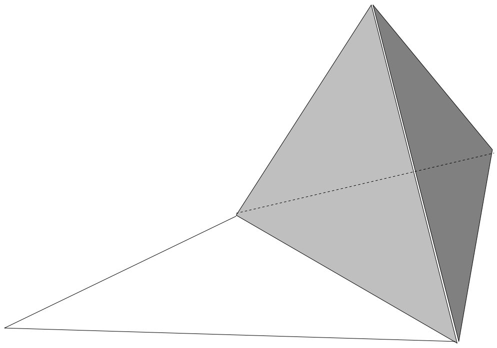
7. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ zadano wielościan topologiczny $W = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \cup \{(x, 0, 0) : -1 \leq x \leq 1\}$. Obliczyć charakterystykę Eulera-Poincarégo $\chi(W)$.

Odp. Przestrzeń W jest homeomorficzna z wielościanem W' będącym sumą powierzchni czworościanu i dwu odcinków o wspólnym końcu wychodzących z dwu wierzchołków czworościanu (rysunek). Otrzymujemy więc kompleks symplicjalny (tj. triangulację) wielościanu W'. Przypomnijmy, że kompleks symplicjalny to taki skończony zbiór sympleksów, że każde dwa z tych sympleksów są rozłączne lub mają wspólna ścianę. Ściany kompleksu – to ściany jego sympleksów. Zatem charakterystyka Eulera–Poincar'ego $\chi(W) = \chi(W')$ = liczba wierzchołków - liczba krawędzi + liczba ścian 2 wymiarowych $= 5 - 8 + 4 = 1$ (dodajemy liczby ścian parzystowymiarowych i odejmujemy nieparzystowymiarowych)

8.Poniższa macierz zawiera opis gry rozgrywanej przez dwu graczy A i



Rysunek 1: pętla γ_1



Rysunek 2: Wielościan W'

.

B. Obaj gracze dysponują trzema strategiami oznaczanymi cyframi $1, 2, 3$. Macierz jest tabelą wygranych, tzn. jeśli w macierzy w wierszu o numerze i i kolumnie o numerze j stoi para liczb (a, b), to jeśli gracz A zastosuje strategię i zaś B strategię j, to wówczas A wygra a złotych zaś B wygra b złotych. Określić czy gra ta ma parę strategii czystych będących punktem równowagi Nasha. Czy gra ta ma parę strategii czystych będących punktem optymalnym w sensie Pareto? Wskazać te punkty. $\begin{bmatrix} (1,0) & (2,1) & (0,-1) \\ (2,2) & (0,1) & (-1,2) \\ (0,-1) & (1,-2) & (1,1) \end{bmatrix}$.

Odp. Są trzy punkty równowagi Nasha, a) gracz A wybiera swoją 1 strategię, B swoją 2 – wygrane $2, 1)$, b) gracz A wybiera swoją 3 strategię, gracz B swoją 3, wygrane $(1, 1)$, c) gracz A swoją 2 strategię, gracz B swoją 1 strategię – wygrane $(2, 2)$. c) jest zarazem punktem równowagi Pareto.

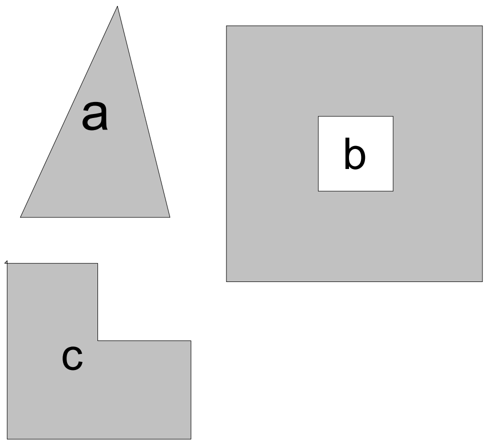
9. Objaśnić na czym polegają strategie mieszane Odp. Strategie mieszane polegają na przypisaniu każdej ze strategii czystych, którymi dysponuje gracz, prawdopodobieństwa, z którym losuje daną strategię czystą.

9'. Objaśnić na czym polega metoda topologii algebraicznej.

Metoda topologii algebraicznej polega na przy porządkowaniu przestrzeniom topologicznym obiektów algebraicznych, np. grup, zaś przekształceniom ciągłym homomorfizmów pomiędzy tymi obiektami algebraicznymi.

10. Pewna wyspa X ma kształt: a) trójkąta b) Kwadratu, z którego usunięto środkowy otwarty kwadrat o 3 razy mniejszym boku, c) sumy trzech kwadratów w formie litery L. Wyspę zamieszkuje 3 mieszkańców, mających zdecydować o lokalizacji klubu. W którym z trzech przypadków istnieje funkcja (procedura) społecznego wyboru $\mu : X \times X \times X \to X$ spełniająca warunki ciągłości (ostateczna decyzja zależy w sposób ciągły od wyborów decydentów), jednomyślności (tzn. jeśli wszyscy wskazują tę samą lokalizację to się ją wybiera),i anonimowości (tzn. jeśli decydenci zmienią swoją kolejność to wynik nie ulegnie zmianie)?

Odp. Dla wyspy a) istnieje odpowiednia funkcja wyboru np. środek ciężkości z równymi wagami wyborów poszczególnych decydentów. Poniewaz wyspa c) jest homeomorficzna z wyspą a) więc tu również można określić taką funkcję wyboru. Natomiast wyspa b) jest homeomorficzna z pierścieniem P, dla którego nie ma takiej funkcji wyboru (wywnioskowaliśmy to z tego, że grupa podstawowa $\pi(P)$ jest izomorficzna z grupą liczb całkowitych z działaniem dodawania, funkcja wyboru oznaczałaby możliwość dzielenia – tutaj przez 3, w obrębie liczb całkowitych, ale $1/3$ nie jest liczbą całkowitą). Zatem dla wyspy c) nie ma funkcji społecznego wyboru spełniającej wymienione postulaty (zobacz Beno Eckmann Śocial choice and topology", dokument dostępny w internecie).



Rysunek 3: wyspy