Ekstrema lokalne Punkt $a \in U \subset \mathbb{R}^n$ jest punktem *minimum lokalnego* funkcji $f : U \to \mathbb{R}$ jeśli istnieje otwarte otoczenie $V \ni a$ spełniające $f(a) \leq f(x)$ dla dowolnego $x \in V$. Analogicznie definiuje się maksimum lokalne. Minima i maksima lokalne noszą nazwę *ekstremów (lokalnych)*. Jeśli f ma pochodne cząstkowe w punkcie ekstremum a to jest on punktem krytycznym, tzn. pochodne te są zerowe. Standardowa metoda badania czy punkt krytyczny jest punktem ekstremum opiera się na własnościach macierzy pochodnych cząstkowych drugiego rzędu (macierzy Hessego). W przypadku funkcji klasy C^2 , tzn. mających wszystkie pochodne drugiego rzędu ciągłe. Jeżeli forma kwadratowa reprezentowana przez macierz Hessego nie jest dodatnio lub ujemnie pólokreślona to w punkcie na pewno nie ma ekstremum (taki punkt nazywa się siodłowym). Tak jest jeśli któryś z minorów głownych (tzn. powstałych przez usunięcie wiersy i kolumn o tych samych numerach) stopnia parzystego macierzy Hessego jest ujemny. Np. w macierzy $H = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ minor główny powstały przez usunięcie 2 wiersza i 2 kolumny, czyli $\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1$ jest ujemny, zatem forma kwadratowa H nie jest półokreślona, stąd jeśli H jest macierzą Hessego w pewnym punkcie krytycznym to w tym punkcie jest siodło. Jeśli macierz Hessego w punkcie krytycznym ma wyznacznik $\neq 0$ to o typie punktu krytycznego rozstrzyga w zupełności kryterium Sylvestera: jeśli wyznaczniki narożnikowe są wszystkie dodatnie ($W_1 > 0, W_2 > 0, \ldots, W_n > 0$) to w punkcie krytycznym mamy minimum lokalne, jeśli $W_1 < 0$, a następne są na przemian dodatnie i ujemne to w punkcie krytycznym jest maksimum lokalne. Jeśli żadna z tych sytuacji nie zachodzi to mamy siodło. Poza tymi przypadkami macierz Hessego nie pozwala stwierdzić jaki jest typ punktu krytycznego. I tak, dla funkcji $f(x, y) = x^4 + y^4$, $g(x, y) = x^4 - y^4$, $h(x, y) = -x^4 - y^4$ punkt $(0, 0)$ jest punktem krytycznym. Macierz Hessego tych trzech funkcji w $(0, 0)$ jest zerowa. Ale f ma w nim minimum, g ma siodło zaś h maksimum. Takie przypadki trzeba badać bezpośrednio przez wgląd w postać funkcji. Uwaga: jeśli macierz Hessego funkcji jest dodatnio półokreślona we wszystkich punktach (nie tylko krytycznych) otwartego wypukłego zbioru V to funkcja ta jest wypukła. Wtedy punkt krytyczny jest punktem minimum globalnego na V (analogicznie dla ujemnie półokreślonych macierzy Hessego : funkcja jest wtedy wklęsła i ma w punkcie krytycznym maksimum). Kryterium półokreśloności jest następujące: jeśli w macierzy H wszystkie minory główne (nie tylko narożnikowe) są nieujemne to odpowiednia forma jest dodatnio półokreślona, jeśli wszystkie minory główne stopnia nieparzystego są niedodatnie, zaś stopnia parzystego nieujemne to forma jest ujemnie półokreślona. Podsumujmy:do stwierdzenia czy forma jest dodatnio określona lub ujemnie określona wystarczy zbadanie minorów narożnikowych jej macierzy. Do zbadania czy jest półokreślona potrzeba określić znak wszystkich minorów głównych. Jeśli któryś z minorów głównych stopnia parzystego jest ujemny to istnieją dwa wektory: jeden, na którym forma ma wartość dodatnią i jeden, na którym forma ma wartość ujemną. Oznacza to dla macierzy drugich pochodnych, że w punkcie nie ma ekstermum (jest siodło).

Przykłady: przypuśćmy, że następujące macierze są macierzami pochodnych 2 rzędu w punkcie krytycznym pewnej funkcji klasy C^2. Określić, stosując kryterium minorów narożnikowych lub kryterium minorów głównych, które z nich są macierzami formy kwadratowej dodatnio lub ujemnie określonej, półokreślonej , i czy można na tej podstawie określić istnienie i typ ekstremum w punkcie: a) $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$,b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

Odp. a) nie jest półokreślona, siodło w punkcie, b) jest dodatnio półokreślona, ale nie dodatnio określona, nie da się na podstawie samej macierzy określić czy jest ekstremum (chociaż możemy wykluczyć maksimum, bo na przekątnej są wyrazy dodatnie) c) minory narożnikowe stopnia nieparzystego są ujemne, zaś stopnia parzystego dodatnie - forma ujemnie określona - mamy maksimum.

Uwagi do zestawu XXIV. Zadania 3, 4 - pojęcie dyfeomorfizmu.

Przypomnijmy, że dyfeomorfizmem klasy C^1 zbioru otwartego $U \subset \mathbb{R}^n$ na zbiór $V \subset \mathbb{R}^n$ jest przekształcenie fc klasy C^1 , różnowartościowe U na V , którego jakobian (tj. wyznacznik macierzy Jacobiego) jest niezerowy w każdym punkcie U. W tedy istnieje f^{-1} i też jest dyfeomorfizmem. Mówimy wówczas, że U i V są dyfeomorficzne. Również złożenie dyfeomorfizmów jest dyfeomorfizmem. Na prostej $\mathbb{R}$ każde dwa przedziały otwarte są dyfeomorficzne. Np. dyfeomorfizmem przeprowadzającym $(0,1)$ na $(1,\infty)$ jest funkcja $f(x) = 1/x$, zaś dyfeomorfizmem przeprowadzającym przedział $(-\pi/2, \pi/2)$ na $\mathbb{R}$ jest funkcja tangens. W $\mathbb{R}^2$ dwa zbiory otwarte spójne są dyfeomorficzne wiw. kiedy mają "tyle samo dziur". I tak, każde dwa zbiory otwarte wypukłe są dyfeomorficzne, bo nie mają żadnych dziur. Podobnie dyfeomorficzne są $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 < 1\}$,

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2+y^2 < 4\}$, pogrubiona litera R (jako zbiór otwarty), pogrubiona litera Q czy P, bo wszystkie mają "jedną dziurę". Ale pogrubiona litera B ma dwie dziury, i nie jest z nimi dyfeomorficzna, za to jest dyfeomorficzna z płaszczyzną z wyrzuconymi dwoma punktami i z pogrubioną cyfrą 8. Niestety wskazanie tu dyfeomorfizmu wzorem jest trudne (odwołuję się tu do intuicyjnego pojęcia dziury. Można je spróbować sprecyzować następująco: spójny podzbiór otwarty płaszczyzny U ma k dziur jeśli jego dopełnienie w $\mathbb{R}^2 \cup \infty \approx \mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ składa się z $k + 1$ rozłącznych zbiorów domkniętych spójnych. Znaczek $\approx$ oznacza tu utożsamienie $\mathbb{R}^2$ uzupełnionej punktem w nieskończoności ze sferą jednostkową w $\mathbb{R}^3$. Utożsamienie dokonuje się przez rzut stereograficzny punktów sfery na $\mathbb{R}^2$ promieniami wychodzącymi z bieguna północnego sfery $\mathbf{N}$. Sam biegun północny $\mathbf{N}$ utożsamiamy z ∞. Szczegóły w Wikipedii w hasłach 'rzut stereograficzny' i 'sfera Riemanna').

Jeżeli dwa zbiory otwarte w $\mathbb{R}^n$ są dyfeomorficzne to istnieje pomiędzy nimi nieskończenie wiele różnych dyfeomorfizmów. Poniżej wskazujemy "w miarę proste"dyfeomorfizmy pomiędzy przykładami z zadań 3 i 4. 3. a) T_1 na T_2. Dyfeomorfizm dany wzorem $f(x, y) = (2x, y)$

b) Trzeci, ukośny bok T leży w prostej $y = 1-x$. Zatem możemy określić szukany dyfeomorfizm wzorem $f(x, y) = (x, \frac{y}{1-x})$

c) Skorzystamy z tego, że złożenie dyfeomorfizmów jest dyfeomorfizmem. Przez dyfeomorfizm $g(x, y) = (2x - 1, y)$ możemy przekształcić T na trójkąt otwarty T' o wierzchołkach $(-1, 1), (-1, 0), (1, 0)$. Jego podstawa pokrywa się z średnicą rozpatrywanego koła. Można sprawdzić, że T' przekształca na koło dyfeomorfizm h zadany wzorem $h(x, y) = (x, \frac{2y\sqrt{1-x^2}}{1/2-x/2} - \sqrt{1 - x^2})$. Szukanym dyfeomorfizmem jest złożenie $f = h \circ g$

d) $f(x, y) = (x, \frac{x^2 y}{1-x})$

e) Znowóż posłużymy się złożeniem, tym razem trzech dyfeomorfizmów. Najpierw, tak jak w b) przekształcimy T na kwadrat K o wierzchołkach $(0, 0), (1, 0), (1, 0), (1, 1)$ dyfeomorfizmem $g(x, y) = (x, \frac{y}{1-x})$, natępnie dyfeomorfizm $h(x, y) = (\pi x - \pi/2, \pi y - \pi/2)$ przekształci K na kwadrat K' o wierzchołkach $(-\pi/2, \pi/2), (-\pi/2, -\pi/2), (\pi/2, \pi/2), (\pi/2, -\pi/2)$. Teraz, dyfeomorfizm $k(x, y) = (\tan x, \tan y)$ przekształci K' na $\mathbb{R}^2$. Czyli szukany dyfeomorfizm to $f = k \circ h \circ g$

Zadanie 4. Pomysł polega na tym, aby skorzystać z symetrii obrotowej pierścieni, i szukać dyfeomorfizmu całej $\mathbb{R}^2$ w postaci $f(x, y) = k(x^2 + y^2) * (x, y)$, gdzie '$*$' oznacza mnożenie wektora przez skalar, zaś $k(t)$ jest pewną funkcją. Najpierw spróbujmy tego na osi X, czyli szukamy $k(x^2)$ tak, aby $k(1^2)*1 = 1$ zaś $k(2^2)*2 = 3$. Spróbujmy funkcji postaci $k(t) = a+bt$. Czyli $a+b = 1, 2a+8b = 3$. Łatwo obliczyć $a = 5/6, b = 1/6$. Stąd sugerowana postać dyfeomorfizmu będzie: $f(x,y) = (5/6 + \frac{x^2+y^2}{6})*(x,y) = (\frac{5}{6}x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}xy^2, \frac{5}{6}y + \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{6}x^2y)$. Nietrudno sprawdzić, że jakobian jest > 0.

Uwaga 1: proszę zwrócić uwagę na to, że w przykładach zadania 3 nie można podać dyfeomorfizmów działających na całym $\mathbb{R}^2$, bowiem wtedy liczba 'kątów' (krzywoliniowych) musi się zgadzać: trójkąt ma trzy kąty, kwadrat 4, a koło żadnych. Te własności dyfeomorfizmy całej $\mathbb{R}^2$ musiałyby zachowywać. Uwaga 2. w $\mathbb{R}^3$ (i w wyzszych wymiarach) wszystko się komplikuje: $\mathbb{R}^3$ z wyrzuconym punktem nie jest dyfeomorficzne, z $\mathbb{R}^3$ z wyrzuconym okręgiem, a żaden z tych zbiorów nie jest dyfeomorficzny z $\mathbb{R}^3$ z wyrzuconą krzywą zamkniętą z supełkiem na niej.