Wskazówki 3

Mirosław Sobolewski

6 maj 2020

Ekstrema lokalne Punkt $\mathbf{a} \in \mathbf{U} \subset \mathbf{R^n}$ jest punktem *minimum lokalnego* funkcji $f : U \to R$ jeśli istnieje otwarte otoczenie $V \ni a$ spełniające $f(a) \leq f(x)$ dla dowolnego $x \in V$. Analogicznie definiuje się maksimum lokalne. Minima i maksima lokalne noszą nazwę *ekstremów (lokalnych)*. Jeśli f ma pochodne cząstkowe w punkcie ekstremum a to jest on punktem krytycznym, tzn. pochodne te są zerowe. Standardowa metoda badania czy punkt krytyczny jest punktem ekstremum opiera się na własnościach macierzy pochodnych cząstkowych drugiego rzędu (macierzy Hessego). W przypadku funkcji klasy C^2 , tzn. mających wszystkie pochodne drugiego rzędu ciągłe. Jeżeli forma kwadratowa reprezentowana przez macierz Hessego nie jest dodatnio lub ujemnie półokreślona to w punkcie na pewno nie ma ekstremum (taki punkt nazywa się siodłowym). Tak jest jeśli któryś z minorów głownych (tzn. powstałych przez usunięcie wiersy i kolumn o tych samych numerach) stopnia parzystego macierzy Hessego jest ujemny. Np. w macierzy $H = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ minor główny powstały przez usunięcie 2 wiersza i 2 kolumny, czyli $\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -1$ jest ujemny, zatem forma kwadratowa H nie jest półokreślona, stąd jeśli H jest macierzą Hessego w pewnym punkcie krytycznym to w tym punkcie jest siodło. Jeśli macierz Hessego w punkcie krytycznym ma wyznacznik $\neq 0$ to o typie punktu krytycznego rozstrzyga w zupełności kryterium Sylvestera : jeśli wyznaczniki narożnikowe są wszystkie dodatnie $(W_1 > 0, W_2 > 0, \ldots, W_n > 0)$ to w punkcie krytycznym mamy minimum lokalne, jeśli $W_1 < 0$, a następne są na przemian dodatnie i ujemne to w punkcie krytycznym jest maksimum lokalne. Jeśli żadna z tych sytuacji nie zachodzi to mamy siodło. Poza tymi przypadkami macierz Hessego nie pozwala stwierdzić jaki jest typ punktu krytycznego. I tak, dla funkcji $f(x, y) = x^4 + y^4$, $g(x, y) = x^4 - y^4$, $h(x, y) = -x^4 - y^4$ punkt $(0, 0)$ jest punktem krytycznym. Macierz Hessego tych trzech funkcji w $(0, 0)$ jest zerowa. Ale f ma w nim minimum, g ma siodło zaś h maksimum. Takie przypadki trzeba badać bezpośrednio przez wgląd w postać funkcji. Uwaga : jeśli macierz Hessego funkcji jest dodatnio półokreślona we wszystkich punktach otwartego wypukłego zbioru V to funkcja ta jest wypukła. Wtedy punkt krytyczny jest punktem minimum globalnego na V (analogicznie dla ujemnie półokreślonych macierzy Hessego : funkcja jest wtedy wklęsła ima w punkcie krytycznym maksimum). Kryterium półokreśloności jest następujące : jeśli w macierzy H wszystkie minory główne (nie tylko narożnikowe) są nieujemne to odpowiednia forma jest dodatnio półokreślona, jeśli wszystkie minory główne stopnia nieparzystego są niedodatnie, zaś stopnia parzystego nieujemne to forma jest ujemnie półokreślona.