Wskazówki

Mirosław Sobolewski

21 kwietnia 2020

Uwagi do zestawu XXII

W zadaniu 4, zasadniczym problemem jest uzasadnienie, że z osiąga wartość największą, gdyż dziedzina jest niezwarta. I tak, np. w b) $z(0,0) = 1$ oraz mamy szacowanie $0 < z(x,y) \leq (1+x^2+y^2)/(\exp(x^2+y^2)$. Łatwo sprawdzić (np. z l'Hospitala), że $(1+t)/e^t) \to 0$ dla $t \to \infty$. Stąd, dla $(x,y) \to \infty$ (w sensie normy), $z(x,y) \to 0$. Zatem, poza pewnym kołem otwartym o środku $(0,0)$ zachodzi $0 < z(x,y) \leq 0,5$. Na kole domkniętym ciągła fukcja z osiąga max na mocy twierdzenia Weierstrassa. To max ≥ 1, zatem osiągane jest wewnątrz, a nie na okręgu będącym brzegiem koła, czyli musi być osiągane wpynkcie krytycznym. Jedynym punktem krytycznym jest $(0,0)$. Poza kołem $0 < z(x,y) \leq 0,5$, stąd 1 jest wartością max na całej $\mathbb{R}^2$. Podobnie argumentujemy a), tutaj $z(x,y) \to -\infty$ dla $(x,y) \to \infty$.

Zadanie 5 Powierzchnia boczna tu oznacza powierzchnię całkowitą. Możemy wyznaczyć $z = 1000/(xy)$. Obszarem zmienności (x,y) jest $\{(x,y) : x > 0, y > 0\} \subset \mathbb{R}^2$. Znów ten zbiór jest niezwarty. Mamy wzór na powierzchnię: $P = 2xy + 2xz + 2yz = 2xy + 2000/y + 2000/x = P(x,y)$ Zauważmy: $P(10,10) = 600$ oraz dla $x < 1$ i dla $y < 1$, $P(x,y) > 2000$. Stąd, możemy ograniczyć się do zbioru $\{(x,y) : x \geq 1, y \geq 1, xy \leq 600\}$, który jest zwarty. Znajdujemy jedyny punkt krytyczny P, mianowicie $(10,10)$. Stąd szukana powierzchnia minimalna to 600 dla sześcianu.

Zadanie 6. możemy wywnioskować z 5: przypuśćmy, że mamy prostopadłościan o powierzchni 600 i objętości V większej niż 1000. Przekształcając ten prostopadłościan przez podobieństwo w skali $(1000/V)^{1/3}$ otrzymamy mniejszy prostopadłościan o objętości 1000, ale o powierzchni < 600, co przeczy wynikowi 5.