Wskazówki

Mirosław Sobolewski

24 marca 2020

Jak badać własności zbiorów w R^n.

Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ nazwiemy punktem *brzegowym* dla zbioru A jeśli do każdej kuli otwartej o środku w x należą punkty zarówno z A jak i spoza A (Uwaga. Punkt brzegowy dla A nie musi należeć do A, w niektórych źródłach przyjmuje się takie założenie) .

Punkt $x \in R^n$ nazwiemy punktem *wewnętrznym* zbioru A jeśli pewna kula otwarta o środku w x zawiera się w A.

W tej terminologii wnętrze zbioru A, $intA$ to zbiór punktów wewnętrznych dla A, zaś brzeg A, bdA to zbiór punktów brzegowych dla A. Zbiór jest otwarty wtedy, kiedy każdy jego punkt jest dla niego wewnętrzny, nie jest otwarty, kiedy któryś z jego punktów jest dla niego brzegowy. Zbiór A nie jest domknięty jeśli pewien punkt brzegowy (punkt skupienia) dla niego nie należy do A. Na przykład zbiór $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, x > 0\}$ nie jest otwarty, bo należy do niego punkt brzegowy $(-1, 0)$ i nie jest domknięty, bo nie należy do niego jego punkt skupienia $(0, 0)$

W przestrzeni R^n jedyne zbiory, które są jednocześnie domknięte i otwarte to zbiór pusty i cała przestrzeń $\mathbb{R}^n$. Przecięcie skończonej liczby i suma dowolnej liczby zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym. Przecięcie (iloczyn mnogościowy) dowolnej sumy zbiorów domkniętych i suma skończonej liczby zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym.

Badane zbiory dobrze jest sobie zwizualizować (np. rysunkiem). Jest to w miarę łatwe na płaszczyźnie, trudniej w $\mathbb{R}^3$. Czasami zbiory wykazują pewną symetrię, np. obrotową. Symetria obrotowa wokół jednej z osi układu współrzędnych często wynika z formy opisu. Np. jeśli zbiór da się opisać układem równań i nierówności postaci $f((x^2+y^2), z) = 0$, $f((x^2+y^2), z) < 0$, $f((x^2 + y^2), z) \leq 0$, $f((x^2 + y^2), z) > 0$, $f((x^2 + y^2), z) \geq 0$ to ma symetrię obrotową względem osi Z (analogicznie dla pozostałych osi). Tak jest np. w punktach i), j) zadania 1 z zestawu XVIII. Wtedy można najpierw znaleźć przekrój zbioru z płaszczyzną XZ, czyli dla $y = 0$, a później zastanowić się co otrzymamy obracając ten przekrój wokół osi Z. I tak, w j) dla $y = 0$ otrzymamy zbiór na płaszczyźnie XZ opisany układem nierówności $z \geq 1 - x^2$ i $x^2 + z^2 < 4$. Jest to przecięcie domkniętego obszaru płaszczyzny leżącego powyżej paraboli $z = 1 - x^2$ (razem z tą parabolą) i koła otwartego o promieniu 2 (tzn. bez ograniczającego okręgu $x^2 + z^2 = 4$). Jeśli teraz będziemy ten zbiór obracać w $\mathbb{R}^3$ wokół osi Z to otrzymamy kulę o promieniu 2 z wydrążeniem w formie paraboloidy obrotowej. Niestety, stwierdzenie symetrii obrotowej względem osi różnej od jednej z osi układu współrzędnych jest dosyć złożone.

Ścisłe uzasadnienie własności zbiorów bezpośrednio z definicji jest pracochłonne. Pomocne mogą być następujące twierdzenia: zbiór opisany w $\mathbb{R}^n$ układem nierówności postaci $f(x_1, \ldots, x_n) < c$ oraz $f(x_1, \ldots, x_n) > c$, gdzie f jest funkcją ciągłą na R^n, a $c \in R$ jest otwarty (zob. zadanie 8, zestaw XIX). Podobnie zbiór opisany układem nierówności postaci $f(x_1, \ldots, x_n) \leq c$ oraz $f(x_1, \ldots, x_n) \geq c$ i równości $f(x_1, \ldots, x_n) = c$ jest domknięty (można to wywnioskować z poprzedniego twierdzenia,np. zbiór opisany nierównością $f(x_1, \ldots, x_n) \geq c$ jest dopełnieniem w $\mathbb{R}^n$ zbioru opisanego nierównością $f(x_1, \ldots, x_n) < c$).

Ciągłe są np. wielomiany czy ogólniej funkcje elementarne , czyli te, które powstają z funkcji x_i, funkcji stałych, trygonometrycznych , wykładniczych, logarytmicznych, arkusowych przez operacje dodawania, odejmowania, mnożenia, dzielenia (wtedy są ciągłe tam, gdzie są określone, czyli poza miejscami zerowymi mianownika), złożenia. Zatem, np. zbiór $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 - z > 3, \sin x < z\}$ jest otwarty zaś zbiór $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 - z \geq 3, \sin x \leq z\}$ jest domknięty w $\mathbb{R}^3$.

Uwaga. Oczywiście, opisane w inny sposób zbiory, mogą być lub nie być domknięte lub otwarte. I tak na przykład zbiór $A_t = \{(x, y) : x^2+y^2 \leq 1, x < t\} \subset \mathbb{R}^2$ (część wspólna domkniętego koła jednostkowego i półpłaszczyzny otwartej $x < t$) jest dla $t > 1$ domknięty i nieotwarty (to po prostu koło domknięte), dla $t \in (-1, 1]$ nie jest ani domknięty, ani otwarty, dla $t \leq -1$ jest zarówno domknięty jak i otwarty jako zbiór pusty.

Zbiory wypukłe często opisane są za pomocą funkcji wypukłych, mianowicie jeśli $f : A \to \mathbb{R}$, gdzie $A \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem wypukłym jest wypukła to podzbiory A opisane nierównościami $f(x) < c$ oraz $f(x) \leq c$, gdzie $c \in \mathbb{R}$ są wypukłe (proszę zwrócić uwagę na kierunek tych nierówności). Ponieważ przecięcie dowolnej liczby zbiorów wypukłych jest zbiorem wypukłym, więć zbiory opisane układem tego typu nierówności są wypukłe. Dla funkcji jednej zmiennej znamy kryterium wypukłości opierające się na znaku 2 pochodnej (podobne kryterium można sformułować dla funkcji wielu zmiennych stosując macierz pochodnych drugiego rzędu, która zostanie później zdefiniowana). Niemniej dla funkcji wypukłych w $\mathbb{R}^n$ można łatwo udowodnić następujące twierdzenia, pozwalające wnioskować o wypukłości pewnych funkcji na podstawie wypukłości innych, mianowicie kombinacja liniowa funkcji wypukłych o współczynnikach dodatnich jest funkcją wypukłą, złożenie funkcji wypukłej z przekształceniem afinicznym jest funkcją wypukłą. Zatem, na przykład funkcja $f(x,y,z) = e^{2x-3y+5z+4} + 3x^4 + 4z^2$ jest wypukła, bo funkcje e^x, x^4, x^2 są wypukłe, zaś przekształcenie $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dane wzorem $2x - 3y + 5z + 4$ jest afiniczne. Ponadto, wielomian drugiego stopnia opisuje funkcję wypukłą kiedy suma jego jednomianów stopnia 2 jest formą kwadratową dodatnio półokreśloną. Np. funkcja dana wzorem $f(x,y,z) = 2x^2 - 2xy + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 5z + 10$ jest wypukła, ponieważ forma $2x^2 - 2xy + y^2 + z^2$ jest dodatnio określona (można to sprawdzić stosując np. kryterium Sylvestera). Na mocy tego co stwierdziliśmy, zbiór $\{(x,y,z) : e^{2x-3y+5z+4} + 3x^4 + 4z^2 \leq 6, 2x^2 - 2xy + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 5z + 10 < 0\} \subset \mathbb{R}^3$ jest zbiorem wypukłym. Niewypukłość zbioru A stwierdzamy wskazując parę punktów $a, b \in A$, takich że łączący je odcinek nie zawiera się w A.

Zwykle kłopotliwe jest zbadanie ograniczoności zbioru. Zbiór jest $X \subset \mathbb{R}^n$ nieograniczony $\Leftrightarrow$ kiedy mozna wskazać ciąg punktów $x_n \in X$, taki, że $||x_n|| \to \infty$, lub co na jedno wychodzi jedna ze współrzędnych elementów tego ciągu $\to \infty$, np. spirala Archimedesa $\{(t(\cos t, t\sin t) : t \in [0,\infty)\}$ jest nieograniczona, gdyż zawiera ciąg $(2n\pi\cos(2n\pi), 2n\pi\sin(2n\pi)) = (2n, 0)$. Na ogół wnioskujemy o nieograniczości z tego, że zbiór zawiera inny, o którym wiemy, że jest nieograniczony np. zbiór $\{(x,y,z) : 2x + 3y + 5z \leq 10\}$ to półprzestrzeń domknięta, leżąca poniżej płaszczyzny $\{(x,y,z) : 2x + 3y + 5z = 10\}$ lecz zawierająca tę płaszczyznę. Ponieważ płaszczyzna jest nieograniczona, wnioskujemy to samo o półprzestrzeni.

Badanie granic.

W przypadku przestrzeni skończeniewymiarowych $\mathbb{R}^n$ wszystkie normy są równoważne, zatem takie własności jak zbieżność i granica ciągu, domkniętość, otwartość, ograniczoność, zwartość zbioru, granica funkcji w punkcie, ciągłość i różniczkowalność funkcji w punkcie nie zależą od przyjętej normy (oczywiście są pojęcia zależne od normy, np. zbiór $\{(x,y) : |x| < 1, |y| < 1\}$ jest kulą w normie max ale nie jest nią w normie euklidesowej.

Zatem stwierdzenie zbieżności ciągu w $\mathbb{R}^n$ sprowadza się do zbadania jego zbieżności 'po współrzędnych'. I tak , ciąg $((1/2)^n, (1+2/n)^n, n\sin(1/n)) \to (0, e^2, 1))$ w $\mathbb{R}^3$, ponieważ odpowiednie ciągi liczbowe zachowują się tak:$(1/2)^n \to 0$, $(1+2/n)^n \to e^2$, $n\sin(1/n) \to 1$. Natomiast ciąg $((-1)^n, (1+2/n)^n, n\sin(1/n))$ nie jest zbieżny, bo nie ma zbieżności na pierwszej współrzędnej.

Funkcje elementarne na $\mathbb{R}^n$ są ciągłe tam, gdzie są określone, czyli wówczas ich granica jest równa wartości. Np. $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \arctan(\frac{2x^3-e^{y^2}}{x^3-2y^2}) = \arctan(\frac{2a^3-e^{b^2}}{a^3-2b^2})$ każdym punkcie punkcie (a,b), w którym $a^3 \neq 2b^2$. Kłopoty pojawiają się przy funkcjach określonych różnymi formułami dla różnych zakresów argumentu (przy pomocy 'klamerki'). metody badania są podobne jak w przypadku funkcji jednej zmiennej, choć trudności rosną, gdyż do punktu, w którym chcemy zbadać granicę można zdążać na wiele różnych sposobów. Istnienie granicy można wykazać przekształcając formułę do postaci elementarnej , która obowiązuje również w badanym punkcie skupienia .Np. $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^3-y^3}{x^5-y^5} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{(x-y)(x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4)} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2+xy+y^2}{x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4} = 3/5$. Znowóż, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$ nie istnieje, gdyż ograniczając się do punktów osi X, czyli postaci $(x,0)$ mamy $\lim_{x\to 0} \frac{x^2\cdot 0}{x^4+0} = 0$ natomiast na prostej $x = y$ mamy $\lim_{x\to 0} \frac{x^2x^2}{x^4+x^4} = 1/2$. Czyli na różnych podzbiorach, których punktem skupienia jest $(0,0)$ otrzymaliśmy różne granice, co oznacza, że w $\mathbb{R}^2$ granicy nie ma. Możemy korzystać ze znanych granic jednej zmiennej np. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(1+x^2+y^4)^{\sqrt{2}}-1}{x^2+y^4} = \lim_{t\to 0} \frac{(1+t)^{\sqrt{2}}}{t} = \sqrt{2}$ (tę ostatnią granicę, ogólniej $((1+t)^a - 1)/t \to a$, można sprawdzić stosując regułę L'Hospitala). W Zadaniu 2 zestawu XVIII pewne trudności może sprawić punkt j). Funkcja, której granicę badamy jest określona poza zbiorem $x^2 + y^3 = 0$. Na osi X mamy granicę 0. Sugeruję, by zbadać, oprócz tego, granicę na podzbiorze na którym mianownik dąży do 0 szybciej niż licznik. Np. takim, by mianownik $x^2 + y^3 = x^3$, czyli inaczej $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$. W przykładach h,i) można skorzystać z twierdzenia o trzech granicach w następujący sposób: jeśli $g(x)$ jest ograniczona, przynajmniej w pewnym otoczeniu punktu a, zaś $f(x) \to 0$ przy $x \to a$ to $\lim_{x\to a} g(x) \cdot f(x) = 0$. Dowód: Mamy $|g(x)| < M$ czyli $-M \cdot |f(x)| < g(x) \cdot f(x) < M \cdot |f(x)|$, ponieważ przy $x \to a$ obie zewnętrzne funkcje dążą do 0 to również $g(x) \cdot f(x) \to 0$. Przykład k) można rozwiązać korzystając z tego, że $|y\ln(x^2+y^2)| \leq |\sqrt{x^2+y^2}\ln(x^2+y^2)|$ a następnie tego, że $t\ln t^a) = (a\ln t)/(1/t) \to 0$ przy $t \to 0$ (mozna użyć reguły L' Hospitala).

Zestaw XIX.

1. a) skorzystać z tego, że $|x^2 - y^2| \leq x^2 + y^2$ b) rozpatrzyć na $x + y$ i na $y = 0$, c) podobnie do 2 h) z zestawu XVIII, d) najpierw dla $x = y = 0$

potem na $x = y = z$.

5. Przy badaniu f_1 : poza parabolą sześcienną $y = x^3$ funkcja jest ciągła (z twierdzeń o zachowaniu ciągłości przy działaniach). W punktach paraboli: zbadać granice $f_1(a, y)$ przy $y \to a^3$ dla a różnych od 0 i 1, a następnie osobno w punktach $(0, 0)$ i $(1, 1)$.

7. Można skorzystać z liniowości iloczynu skalarnego względem każdego z czynników i zapisać $< (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) >$ jako wielomian od $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ uwzględniając, że $(x_1, \ldots, x_n) = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$, gdzie $e_1, \ldots, e_n$ wektory bazy staandardowej, podobnie dla y . Wielomiany są ciągłe. Można też zamiast tego skorzystać z nierówności Schwartza (ta druga metoda przenosi się na nieskończenie wymiarowe przestrzenie z iloczynem skalarnym, w szczególności tzw. przestrzenie Hilberta).

8. Wyjść od formuły ϵ, δ ciągłości .