

Programowanie liniowe – metoda sympleks

Mirosław Sobolewski

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW

wykład z algebry liniowej
Warszawa, styczeń 2009

Metoda sympleks

Twórca– George Dantzig, USA 1947 rok

Cel: rozwiązywanie zadania programowania liniowego określonego w postaci standardowej

$$f(x_1, \dots, x_n) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n \rightarrow \min (f - \text{funkcja celu})$$

przy warunkach

$$U: \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_{m1} + \dots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}, x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, \text{ gdzie } b_i \geq 0$$

dla $i = 1, \dots, m$. W skrócie :

$$\text{Min}\{c^T \cdot x : Ax = b, x \geq 0\}, \text{ gdzie } A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}. \text{ Zakładamy, że } r(A) = m.$$

Schemat przeszukiwania: Zaczynając od pewnego rozwiązania bazowego dopuszczalnego, przechodzimy kolejno do innych rozwiązań bazowych dopuszczalnych, w każdym kroku zastępując jeden element zbioru bazowego innym, dopóki da się pomniejszyć wartość funkcji celu f .

Interpretacja geometryczna: Rozwiązania bazowe dopuszczalne = wierzchołki zbioru dopuszczalnego X .

Wymiana jednego elementu w zbiorze bazowym = przejście do sąsiedniego (tzn. połączonego krawędzią) wierzchołka X . Wędrowkę po wierzchołkach kończymy w wierzchołku "najniższym" w sensie funkcji celu f .

Przykład (Szczegóły metody sympleks)

Szukamy największej wartości funkcji $g(x_1, x_2) = 15x_1 + 10x_2$, przy ograniczeniach (*) $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 \leq 2, x_2 \leq 3, x_1 + x_2 \leq 4$.

Sprowadzamy zagadnienie do postaci standardowej, wprowadzając dodatkowe zmienne x_3, x_4, x_5 , zastępując nierówności (*) następującym układem równości i nierówności elementarnych:

$$x_1 + x_3 = 2$$

$$x_2 + x_4 = 3$$

$$x_1 + x_2 + x_5 = 4$$

$$x_1 \geq 0, \dots, x_5 \geq 0$$

zaś maksymalizację funkcji g minimalizacją funkcji

$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = -15x_1 - 10x_2$. Inaczej można to zadanie zapisać w postaci $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = -15x_1 - 10x_2 \rightarrow \min$ przy

$$Ax = b, x \geq \mathbf{0}, \text{ gdzie } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Przykład (cd)

Utworzymy tzw. tablicę sympleksową, składającą z macierzy bazowego układu równań zadania programowania liniowego, rozszerzonej o wiersz nazwany **wierszem funkcji celu** reprezentujący równanie $z = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \Leftrightarrow z - f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 0$ gdzie z jest pewną dodatkową zmienną i pewne pomocnicze kolumny tzw. kolumnę ilorazów, która pozwoli nam podjąć decyzję usunięcia zmiennej z układu bazowego i kolumnę reprezentującą wybór zmiennych układu bazowego. Początkowym wektorem bazowym dopuszczalnym jest $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 2, 3, 4)$

Zmienna bazowa	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	Iloraz
x_3	0	1	0	1	0	0	2	*
x_4	0	0	1	0	1	0	3	*
x_5	0	1	1	0	0	1	4	*
wiersz f	1	15	10	0	0	0	0	nic

Przykład

W wierszu f (funkcji celu) występują rubrykach zmiennych x_1, x_2 wyrazy dodatnie. Oznacza to, że można poprawić (zmniejszyć) funkcję celu przechodząc do nowego wektora bazowego dopuszczalnego. Jako nową zmienną bazową wybieramy x_1 , kierując się tym, że w jej rubryce w wierszu f stoi największa liczba.

Przykład

W wierszu f (funkcji celu) występują rubrykach zmiennych x_1, x_2 wyrazy dodatnie. Oznacza to, że można poprawić (zmniejszyć) funkcję celu przechodząc do nowego wektora bazowego dopuszczalnego. Jako nową zmienną bazową wybieramy x_1 , kierując się tym, że w jej rubryce w wierszu f stoi największa liczba.

Musimy również wybrać spośród zmiennych x_3, x_4, x_5 , tę, która opuści zbiór zmiennych bazowych. W tym celu obliczamy ilorazy wyrazów stałych z kolumny b przez odpowiadające im elementy w kolumnie nowej zmiennej bazowej x_1 – o ile elementy te są dodatnie

Przykład

W wierszu f (funkcji celu) występują rubrykach zmiennych x_1, x_2 wyrazy dodatnie. Oznacza to, że można poprawić (zmniejszyć) funkcję celu przechodząc do nowego wektora bazowego dopuszczalnego. Jako nową zmienną bazową wybieramy x_1 , kierując się tym, że w jej rubryce w wierszu f stoi największa liczba.

Musimy również wybrać spośród zmiennych x_3, x_4, x_5 , tę, która opuści zbiór zmiennych bazowych. W tym celu obliczamy ilorazy wyrazów stałych z kolumny b przez odpowiadające im elementy w kolumnie nowej zmiennej bazowej x_1 – o ile elementy te są dodatnie

(jeśliby takich elementów nie było, oznaczałoby to, że f nie jest ograniczona z dołu na X)

Przykład

Zmienna bazowa	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	iloraz
x_3	0	1	0	1	0	0	2	$2/1=2$
x_4	0	0	1	0	1	0	3	nd
x_5	0	1	1	0	0	1	4	$4/1=4$
wiersz f	1	15	10	0	0	0	0	nic

Przykład

Zmienna bazowa	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	Iloraz
x_3	0	1	0	1	0	0	2	$2/1=2$
x_4	0	0	1	0	1	0	3	nd
x_5	0	1	1	0	0	1	4	$4/1=4$
wiersz f	1	15	10	0	0	0	0	nic

Najmniejszy z ilorazów = 2, w jego wierszu (w_1) jest 1 kolumny zmiennej bazowej x_3 – opuszcza ona zmienne bazowe.

Przykład

Zmienna bazowa	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	Iloraz
x_3	0	1	0	1	0	0	2	$2/1=2$
x_4	0	0	1	0	1	0	3	nd
x_5	0	1	1	0	0	1	4	$4/1=4$
wiersz f	1	15	10	0	0	0	0	nic

Najmniejszy z ilorazów = 2, w jego wierszu (w_1) jest 1 kolumny zmiennej bazowej x_3 – opuszcza ona zmienne bazowe. Operacjami : $w_3 - w_1$, $w_f - 15w_1$ budujemy nową tabelę – względem x_1, x_4, x_5 .

Zmienna bazowa	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	Iloraz
x_1	0	1	0	1	0	0	2	*
x_4	0	0	1	0	1	0	3	*
x_5	0	0	1	-1	0	1	2	*
wiersz f	1	0	10	-15	0	0	-30	nic

Nowa tabela sympleksowa

Przykład

Nowym punktem bazowym dopuszczalnym jest

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2, 0, 0, 3, 2)$, wartość f odczytujemy w w_f , rubryce b : mamy $z = -30$. Znów w wierszu funkcji celu zauważamy element dodatni -10 w rubryce x_2 . Zatem można poprawić wartość f . Nową zmienną bazową jest x_2 , zmienną opuszczającą zmienną bazową wyznacza test ilorazów:

Zmienna bazowa	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	iloraz
x_1	0	1	0	1	0	0	2	nd
x_4	0	0	1	0	1	0	3	$3/1=3$
x_5	0	0	1	-1	0	1	2	$2/1=2$
wiersz f	1	0	10	-15	0	0	-30	nic

Jest nią x_5 Przy pomocy operacji $w_2 - w_3, w_f - 10w_3$ tworzymy następną tabelę sympleks:

Trzecia tabela sympleksowa

Przykład

Zmienna bazowa	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	iloraz
x_1	0	1	0	1	0	0	2	*
x_4	0	0	0	1	1	-1	1	*
x_2	0	0	1	-1	0	1	2	*
wiersz f	1	0	0	-5	0	-10	-50	nic

Tym razem w wierszu f w rubrykach zmiennych x_1, \dots, x_5 nie ma dodatnich elementów – tzn. jesteśmy w minimum $= -50$. Znalezione wektor bazowy dopuszczalny to $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2, 2, 0, 1, 0)$. Zatem rozwiązanie pierwotnego problemu to $\max(g) = 50$, w punkcie $(x_1, x_2) = (2, 2)$

Znajdowanie początkowego wektora bazowego dopuszczalnego

Mamy zbiór X opisany standardowo przez

$Ax = b, x = [x_1, \dots, x_n]^T \geq \mathbf{0}$, gdzie $A \in M_{m \times n}, b \in M_{m \times 1}, b \geq \mathbf{0}$. Jak stwierdzić, że X jest niepusty, i jeśli tak jest jak znaleźć wektor bazowy dopuszczalny?

Stosuje się tzw. metodę **sztucznej bazy**, wprowadzając dodatkowe zmienne, y_1, \dots, y_m , macierz współczynników A przedłużając o macierz jednostkową I_m . Tzn. macierz układu dla $n + m$ zmiennych ma teraz postać $[A|I_m|b] \in M_{m \times (n+m+1)}(\mathbb{R})$, z macierzą współczynników $A' = [A|I_m] \in M_{m \times (n+m)}$ oraz $x' = [x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]^T$, i rozwiązujemy problem $y_1 + \dots + y_m \rightarrow \min$ przy warunkach $A'x' = b, x' \geq \mathbf{0}$.

Ten problem ma zawsze rozwiązanie.

Jeśli osiągniemy $\min = 0$ to $X \neq \emptyset$, w przeciwnym wypadku, tzn. $\min > 0$ mamy $X = \emptyset$.

Przykład

Zbiór $X \subset \mathbb{R}^4$ opisany jest przez:

$$8x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 4$$

$$3x_1 + x_2 - 2x_3 = 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Wprowadzamy sztuczne zmienne y_1, y_2 i funkcję celu

$f(x_1, \dots, x_4, y_1, y_2) = y_1 + y_2 \rightarrow \min$ przy warunkach

$$8x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 + y_1 = 4$$

$$3x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + y_2 = 1$$

$$z - f(x_1, \dots, x_4, y_1, y_2) = z - y_1 - y_2$$

$$x_1, \dots, x_4 \geq 0, y_1, y_2 \geq 0$$

Zmienna bazowa	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	b	Iloraz
y_1	0	8	3	-5	1	1	0	4	*
y_2	0	3	1	-2	-1	0	1	1	*
wiersz f	1	0	0	0	0	-1	-1	0	nic

Po operacji $w_f + w_1 + w_2$ otrzymujemy tablicę sympleks

Przykład (tablica sympleks)

Zmienna bazowa	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	b	iloraz
y_1	0	8	3	-5	1	1	0	4	4/3
y_2	0	3	1	-2	-1	0	1	1	1/1
wiersz f	1	11	4	-7	0	0	0	5	nic

Jako nową zmienną bazową wybieramy x_2 , usuwamy y_2 . Po operacjach $w_1 - 3w_2$, $w_f - 4w_2$ mamy nową tablica sympleks

Zmienna bazowa	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	b	iloraz
y_1	0	-1	0	1	4	1	-3	1	1/1
x_2	0	3	1	-2	-1	0	1	1	nd
wiersz f	1	-1	0	1	4	0	-4	1	nic

Wprowadzamy x_3 usuwamy y_1 . Po operacjach $w_2 + 2w_1$, $w_f - w_1$ otrzymujemy:

Przykład (ostateczna tabela sympleks)

Zmienna bazowa	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	b	iloraz
x_3	0	-1	0	1	4	1	-3	1	*
x_2	0	1	1	0	7	2	-5	3	*
wiersz f	1	0	0	0	0	-1	-1	0	nic

Otrzymaliśmy $\min f = 0$, zatem mamy niepusty X i należy do niego dopuszczalny punkt bazowy $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 3, 1, 0)$.