2. Rozwiązania zadań 1. kolokwium z analizy

Mirosław Sobolewski

22 kwietnia

1. Całki typu $\int w(x)\ln^n x dx$, gdzie $w(x)$ jest funkcją wymierną obliczamy całkując n-krotnie przez części, przy czym czynnikiem różniczkowanym jest $\ln^n x$. Zatem $\int x(\ln x)^2 dx = \frac{x^2}{2}(\ln x)^2 - \int \frac{x^2}{2}\frac{2\ln x}{x}dx = \frac{x^2}{2}(\ln x)^2 - \int x\ln x dx = \frac{x^2}{2}(\ln x)^2 - (\frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}dx) = \frac{x^2}{2}(\ln x)^2 - \frac{x^2}{2}\ln x + x^2/4 + c$(podobnie całkujemy $\int w(x)\mathrm{arctg}^n x dx$)

2. $\int_0^{1/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int_1^{3/4} t^{-1/2}dt = -\frac{1}{2}[2t^{1/2}]_1^{3/4} = 1 - \sqrt{3}/2$ (zastosowaliśmy podstawienie $t = 1 - x^2$, $dt = -2xdx$)

3. $\int_{-5/2}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{2x+5}} = \frac{1}{2}\int_0^7 t^{-1/3}dt = \frac{1}{2}[\frac{3}{2}t^{2/3}]_0^7 = \frac{3}{4}7^{2/3}$ (zastosowaliśmy podstawienie $t = 2x + 5$, $dx = \frac{dt}{2}$).

4. Nierówność $x^2 + y^2 - z^2 + 1 < 0$ można zapisać w równoważnej postaci $x^2 + y^2 + 1 < z^2$, która z kolei jest równoważna rozłącznej alternatywie: $\sqrt{x^2+y^2+1} < z$ albo $-\sqrt{x^2+y^2+1} > z$. Zatem, oznaczając $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2+1} < z\}$, $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -\sqrt{x^2+y^2+1} > z\}$, mamy $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - z^2 + 1 < 0\} = U \cup V$. Zbiór U jest otwarty, gdyż można go zapisać $\{(x,y,z) : f(x,y,z) \in (-\infty, 0) \subset \mathbb{R}\}$, gdzie f oznacza ciągłą funkcję $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+1} - z$, podobnie otwarty jest zbiór V (ogólnie, zbiory opisane w ten sposób przy pomocy funkcyj ciągłych i nierówności 'ostrych' są otwarte, zaś przy pomocy nierówności 'nieostrych' – domknięte). Mamy $(0,0,2) \in U$ oraz $(0,0,-2) \in V$. Zatem przedstawiliśmy zbiór $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2-z^2+1 < 0\}$ jako sumę dwóch otwartych rozłącznych niepustych zbiorów – stąd zbiór ten nie jest spójny, więc tym bardziej nie jest wypukły. Zbiór ten nie jest również ograniczony, gdyż zawiera nieograniczoną półprostą $\{(0,0,t) : 2 < t\}$.

5. Zbiór $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |2x - 3y| \geq 2\}$ jest nieograniczony, gdyż zawiera prostą $2x - 3y = 2$, która jest zbiorem nieograniczonym. Tym bardziej zbiór ten nie jest zwarty (w przestrzeniach $\mathbb{R}^n$ mamy zwarty=domknięty+ograniczony). Należą do niego punkty $A = (4,2)$ oraz $B = (-4,-2)$, ale nie należy do niego punkt $(0,0)$, będący środkiem odcinka łączącego A z B. Zatem badany zbiór nie jest wypukły (nietrudno pokazać, podobnie jak w poprzednim zadaniu, że

nie jest on nawet spójny, jest bowiem sumą dwóch rozłącznych półpłaszczyzn domkniętych, jednej opisanej nierównością $2x-3 \geq 2$ i drugiej opisanej przez $2x-3 \leq -2$).

6. Mamy $|\sin n + \sin(n^2)| \leq 2$, zatem $\lim \frac{\sin n+\sin(n^2)}{n+n^2} = \lim(\sin n + \sin(n^2))\frac{1}{n+n^2} = 0$, ponieważ iloczyn ciągu ograniczonego i ciągu dążącego do 0 dąży do 0. Ponadto $(\frac{1}{4} + \frac{3n+1}{4n+2})^{n^2} = (\frac{16n+6}{16n+8})^{n^2} = (1 + \frac{-2}{16n+8})^{\frac{16n+8}{-2}\cdot\frac{-2n^2}{16n+8}} \to e^{-\infty} = 0$ (skorzystaliśmy z granicy $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e$). Zatem badany ciąg $(\frac{\sin n+\sin(n^2)}{n+n^2}, (\frac{1}{4} + \frac{3n+1}{4n+2})^{n^2})$ dąży do punktu $(0,0)$.

7. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+x^3+y^3)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln(1+x^3+y^3)}{x^3+y^3} \cdot \frac{x^3+y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} = 1 \cdot \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot x^2 + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot y^2) = 0$, ponieważ $\lim_{t\to 0} \ln(1+t)/t = 1$ oraz $|\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}| \leq 1$, $|\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}| \leq 1$ (iloczyn funkcji dążącej do 0 przez funkcję ograniczoną dąży do 0).

8. Funkcja $f(x,y) = \frac{\sin(x^2y)}{x^3+y^3}$ jest ciągła w punktach $(1,1)$, $(0,1)$ na mocy podanych na wykładzie twierdzeń o ciągłości sumy, iloczynu, ilorazu (tam, gdzie jest określony), złożenia funkcyj ciągłych. Rozpatrzmy ciąg $(x_n, y_n) = (1, -1+1/n) \to (1,-1)$. Mamy $\lim f((x_n,y_n)) = \lim \frac{\sin(1\cdot(-1+1/n))}{1+(-1+1/n)^3} = \frac{\sin(-1)}{0^+} = -\infty \neq 0 = f((1,-1))$, zatem f nie jest ciągła w $(1,-1)$. Podobnie mamy ciąg $b_n = (1/n, 1/n) \to (0,0)$, natomiast $\lim f(b_n) = \lim \frac{\sin(1/n^3)}{2/n^3} = 1/2 \neq 0 = f((0,0))$, co przeczy ciągłości f w $(0,0)$.

9. $f(x,y,z) =$arctge^{xy+2z}, stąd $\frac{\partial f}{\partial x} = e^{xy+2z}y/(1+e^{2xy+4z})$, $\frac{\partial f}{\partial y} = e^{xy+2z}x/(1+e^{2xy+4z})$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 2e^{xy+2z}/(1+e^{2xy+4z})$.

10. $f(x,y,z) = xy + 2y^2z^2 + 3z^3x^3$, skąd $\frac{\partial f}{\partial x} = y + 9z^3x^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x + 4yz^2$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 4y^2z + 9z^2x^3$. zatem $||\bigtriangledown f(0,1,-1)|| = ||(\frac{\partial f}{\partial x}(0,1,-1), \frac{\partial f}{\partial y}(0,1,-1), \frac{\partial f}{\partial z}(0,1,-1)|| = \sqrt{1^2 + 4^2 + (-4)^2} = \sqrt{33}$ ($\bigtriangledown f$ oznacza gradient f).