Rozwiązania

27 stycznia 2013

Zadanie 1 a) Przestrzeń W opisana jest układem równań liniowych jednorodnych $U : \begin{cases} x_1 + 3x_2 & -2x_3 - 2x_4 & = & 0 \\ 2x_1 + 5x_2 & -4x_3 - 3x_4 & = & 0 \end{cases}$. Macierz współczynników tego układu to $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 & -3 \end{bmatrix}$. Rząd tej macierzy wynosi 2 (ma 2 niezależne liniowo wiersze), zatem wymiar przestrzeni rozwiązań układu wynosi $dimW = dim\mathbb{R}^4 - r(A) = 4 - 2 = 2$ b) Łatwo sprawdzić podstawiając współrzędne wektora $(1, 1, 1, 1)$ do układu U, że $(1, 1, 1, 1) \in W$.

Twierdzenie Grassmanna o wymianie orzeka, że każdy układ liniowo niezależny w W można uzupełnić elementami dowolnej bazy do bazy W(wektor $(1, 1, 1, 1)$ jest niezerowy, więc sam tworzy układ liniowo niezależny). Kolejnymi przekształceniami wierszowymi $w_2 - 2w_1, w_1 + 3w_2, (-1) * w_1$ sprowadzamy macierz A do postaci schodkowej zredukowanej $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, skąd odczytujemy układ równoważny U, mianowicie $U : \begin{cases} x_1 & -2x_3 + x_4 & = & 0 \\ & x_2 - x_4 & = & 0 \end{cases}$, z którego otrzymujemy rozwiązanie ogólne $U : \begin{cases} x_1 = & 2x_3 - x_4 \\ x_2 = & x_4 \end{cases}$.

Przyjmując najpierw $x_3 = 1, x_4 = 0$ otrzymujemy $w_1 = (2, 0, 1, 0)$ oraz przyjmując $x_3 = 0, x_4 = 1$ otrzymujemy $w_2 = (-1, 1, 0, 1)$. Wektory w_1, w_2 tworzą bazę W. Nietrudno spostrzec, że np. układ złożony z wektorów $(1, 1, 1, 1)$ i w_1 jest liniowo niezależnym układem wektorów W. Zatem, ponieważ $dimW = 2$ jest on wymagana bazą. c) Przypuśćmy ze $\alpha_1 = (3, s, 2, 1), \alpha_2, \alpha_3$ tworzą taki układ liniowo niezależny. Podukład układu liniowo niezależnego jest też liniowo niezależny, zatem wektory α_2, α_3 są liniowo niezależne. Skoro należą one do W i wiemy, ze $\dim W = 2$, tworzą one bazę W. Czyli α_1 nie jest kombinacją liniową α_2 i $\alpha_3 \Leftrightarrow \alpha_1 \notin W$. Z kolei $\alpha_1 \in W \Leftrightarrow$ współrzędne α_1 spełniają układ U. Rozwiązując U : $\begin{cases} 3 + 3s & -2 \cdot 2 - 2 & = & 0 \\ 2 \cdot 3 + 5s & -4 \cdot 2 - 3 & = & 0 \end{cases}$, otrzymujemy $s = 1$. Zatem wymagany układ wektorów będzie istniał $\Leftrightarrow s \neq 1$.

Zadanie 2. Spostrzegamy, że $(4, 9, 8, 13) = 2(1, 2, 1, 3) + (2, 5, 6, 7)$. Zatem $V = lin((1, 2, 1, 3), (2, 5, 6, 7))$. Wektory $v_1 = (1, 2, 1, 3), v_2 = (2, 5, 6, 7)$ są liniowo niezależne, zatem tworzą one bazę V. Stąd $\dim V = 2$. Rząd macierzy współczynników jednorodnego układu równań opisującego V musi wynosić $4 - dim V = 4 - 2 = 2$. Układ ten można np. znaleźć następująco: rozważmy macierz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$, której wierszami są v_1, v_2. Wyznacznik podmacierzy złożonej z z pierwszych dwóch kolumn $\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \neq 0$. Zatem wektor $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in V \Leftrightarrow$ spełnione są $\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 6 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} = 0$ i $\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ x_1 & x_2 & x_4 \end{bmatrix} = 0$ (macierze, których wyznaczniki przyrównujemy do 0 powstały z macierzy $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}$ przez dołączenie do pierwszych 2 kolumn albo kolumny 3 albo 4) Rozwijając oba wyznaczniki względem 3 wiersza otrzymujemy układ: $U : \begin{cases} 7x_1 - 4x_2 \quad +x_3 & = 0 \\ -x_1 - x_2 \qquad\quad +x_4 & = 0 \end{cases}$

c) W_t zawiera się w $V \Leftrightarrow$ każdy z wektorów $w_1 = (1, 1, -3, 2), w_2 = (2, 3, -2, t)$ rozpinających W_t należy do V. Możemy skorzystać z układu U opisującego V z części b). w_1 spełnia ten układ, dla w_2 dostajemy $7 \cdot 2 - 4 \cdot 3 - 2 = 0$ oraz $-2 - 3 + t = 0$ czyli $t = 5$. Dla $t = 5$ wektory $w_1 = (1, 1, -3, 2)$ i $w_2 = (2, 3, -2, 5)$ tworzą układ liniowo niezależny, czyli $\dim W_t = 2$ i uwzględniając $W_t \subset V$ i $\dim V = 2$ mamy $V = W_t$. Zatem $W_t = V \Leftrightarrow t = 5$.

Zadanie 3 a) Weźmy jako pierwszy wektor poszukiwanej bazy jakikolwiek wektor $v_1 \neq (2, 1, 2)$ należący do V, np. niech $v_1 = (1, 0, 3)$. Niech v_2 oznacza drugi wektor tej bazy ($\dim V = 2$ gdyż V jest opisane w $\mathbb{R}^3$ jednym niezerowym równaniem jednorodnym). Zgodnie z definicją współrzędnych wektora w bazie musi być: $1 \cdot v_1 + 3 \cdot v_2 = (2, 1, 2)$ czyli $(1, 0, 3) + 3 \cdot v_2 = (2, 1, 2)$ skąd $v_2 = \frac{1}{3}(1, 1, -1) = (1/3, 1/3, -1/3)$. Łatwo sprawdzić, ze v_1 i v_2 są liniowo niezależne, dają więc przykład poszukiwanej bazy (oczywiście możliwe sa również inne takie przykłady) b) przypuśćmy, mamy w V taką bazę v_1, v_2. Wtedy mielibyśmy $(2, 1, 2) = 1 \cdot v_1 + 3 \cdot v_2$ oraz $(4, 1, 8) = (-1) \cdot v_1 - 3 \cdot v_2 = -(2, 1, 2)$; sprzeczność.

Zadanie 4. Łatwo znaleźć macierz ϕ w bazach standardowych w $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$: $M(\phi)_{st}^{st} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ Możemy teraz skorzystać z odpowiednich macierzy zamiany współrzędnych. Mamy bowiem $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = M(id)_{st}^{\mathcal{B}} M(\phi)_{st}^{st} M(id)_{\mathcal{A}}^{st}$. Od razu mamy $M(id)_{\mathcal{A}}^{st} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (zgodnie z definicją jej kolejne kolumny tworzą współrzędne kolejnych wektorów bazy $\mathcal{A}$ w bazie standardowej; czyli po prostu wpisujemy te wektory jako kolumny). Chcąc wyznaczyć $M(id)_{st}^{\mathcal{B}}$ możemy skorzystać z tego, że

$M(id)_{st}^{\mathcal{B}} = (M(id)_{\mathcal{B}}^{st})^{-1} = (\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix})^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ (w ostatnim obliczeniu można użyć wzoru na macierz odwrotną do odwracalnej macierzy 2×2: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$). Na koniec obliczamy:

$$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 3 & -16 & -5 \end{bmatrix}.$$

Oczywiście można również obliczyć tę macierz bezpośrednio, obliczajac wartości ϕ na poszczególnych wektorach bazy $\mathcal{A}$ i przedstawiajac je jako kombinacje liniowe wektorów $\mathcal{B}$. Proszę porównać obie metody. b) Można użyć macierzy obliczonej w a). $\begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 3 & -16 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 \\ 36 \end{bmatrix}$. Czyli współrzędne $\phi(\alpha)$ w bazie $\mathcal{B}$ są $-11,\ 36$. To samo można znaleźć bezpośrednio: $\alpha = 3(1,-1,1) - 2(0,1,2) + (1,0,1) = (4,-5,0)$ czyli $\phi(\alpha) = \phi((4,-5,0)) = (3,-11) = (-11)(3,1) + 36(1,0)$ c) Niech $\mathcal{C} = \{v_1, v_2, v_3\}$ zaś $\mathcal{D} = \{w_1, w_2\}$. Zgodnie z definicją $M(\phi)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}$ szukamy takiej trójki liniowo niezależnych wektorów v_1, v_2, v_3 w $\mathbb{R}^3$ oraz pary liniowo niezależnych wektorów w_1, w_2 w $\mathbb{R}^2$, aby $\phi(v_1) = w_1, \phi(v_2) = w_2$ oraz $\phi(v_3) = w_1 + 2w_2$. Spróbujmy położyć $v_1 = (1,0,0), v_2 = (0,1,0)$. Wtedy $w_1 = \phi(v_1) = (2,1)$ i $w_2 = (1,3)$. Stąd $\phi(v_3) = w_1 + 2w_2 = (2,1) + 2(1,3) = (4,7)$. Oznaczając $v_3 = (x_1, x_2, x_3)$ mamy $\phi(v_3) = (2x_1 + x_2 - x_3, x_1 + 3x_2 + x_3) = (4,7)$, skąd mamy układ dwóch równań: $2x_1 + x_2 - x_3 = 4$ oraz $x_1 + 3x_2 + x_3 = 7$. Rozwiązując ten układ dostajemy jego rozwiązanie ogólne: $x_1 = 1 + \frac{4}{5}x_3$ oraz $x_2 = 2 - \frac{3}{5}x_3$. Np.przyjmując zmienną wolną $x_3 = 5$ mamy $v_3 = (5,-1,5)$. Łatwo sprawdzić, że teraz układ v_1, v_2, v_3 jest liniowo niezależny.

Zadanie 5. Przy pomocy przekształceń wierszowych $w_3 - 2w_1$ i $w_4 -$

$w_1 - w_2$ przekształcamy macierz A do macierzy $A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. Mamy $\det A = \det A'$ (proszę sobie przypomnieć, jak na wartość wyznacznika wpływają przekształcenia wierszowe). Macierz A' ma strukturę blokową $A' = \begin{bmatrix} X & Y \\ \mathbf{0} & Z \end{bmatrix}$, gdzie X, Z sa blokami kwadratowymi, zaś $\mathbf{0}$ oznacza blok zer. Zatem $\det A' = \det X \cdot \det Z = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = 1 \cdot (-2) = -2$. Czyli $\det A = -2$ b) Korzystając podobnie ze struktury blokowej $\det B = \det \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & r \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = 2 \cdot (18 - 2r)$. Macierz jest odwracalna$\Leftrightarrow$ jej wyznacznik$\neq 0$. Zatem, korzystając z twierdzenia Cauchy'ego o mnożeniu wyznaczników, $B \cdot A \cdot B \cdot A \cdot B$ jest odwracalna $\Leftrightarrow (\det A)^2 (\det B)^3 \neq 0 \Leftrightarrow 4 \cdot 2^3 \cdot (18 - 2r)^3 \neq 0 \Leftrightarrow r \neq 9$.

Zadanie 6 a) Wyznaczamy wartości własne ϕ. Sa one pierwiastkami wielomianu charakterystycznego $w_\phi = \det \begin{bmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -6 & 4-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4 + 6 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$. Stąd mamy dwie różne wartości własne $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$. Jest to warunek wystarczający istnienia w $\mathbb{R}^2$ bazy złożonej z wektorów własnych ϕ. Wyznaczmy bazy przestrzeni własnych. $V_{(1)}$: $\begin{bmatrix} -1-1 & 1 \\ -6 & 4-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Przekształcając macierz $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$ przekształceniami wierszowymi możemy dojść do $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Czyli $V_{(1)}$ jest opisana równaniem $-2x_1 + x_2 = 0$, którego rozwiązaniem ogólnym jest $x_2 = 2x_1$. Przyjmując wartość zmiennej wolnej $x_1 = 1$ otrzy mujemy wektor $(1, 2)$ tworzący bazę $V_{(1)}$. Podobnie, przekształcając macierz $\begin{bmatrix} -1-2 & 1 \\ -6 & 4-2 \end{bmatrix}$ znajdziemy wektor $(1, 3)$ tworzący bazę $V_{(2)}$. Jeśli połączymy bazy $V_{(2)}$ i $V_{(1)}$ w jeden układ otrzymamy bazę $\mathcal{B} = \{(1, 3), (1, 2)\}$ przestrzeni $\mathbb{R}^2$ złożoną z wektorów własnych ϕ. Macierz $M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (proszę zwrócić uwagę na to, że w macierzy tej na przekątnej występują wartości własne ϕ w tej samej kolejności jak odpowiednie wektory własne w bazie $\mathcal{B}$.) b) korzystając z a) i przyjmując $C = M(id)_{\mathcal{B}}^{st} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ mamy $C^{-1}AC = M(id)_{st}^{\mathcal{B}} M(\phi)_{st}^{st} M(id)_{\mathcal{B}}^{st} = M(\phi)_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Stąd $A = C \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} C^{-1}$.

Zatem $A^{200} = C \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{200} C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^{200} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} =$ $\begin{bmatrix} 2^{201}+3 & 2^{200}-1 \\ -6 \cdot 2^{200}+6 & 3 \cdot 2^{200}+2 \end{bmatrix}$.

Zadanie 7. a) Rozwiązaniem ogólnym równania opisującego W jest $x_1 = 2x_2 - 2x_3$. Podstawiając za zmienne niezależne $x_2 = 1, x_3 = 0$, a następnie $x_2 = 0, x_3 = 1$ otrzymujemy odpowiednio dwa wektory pewnej bazy $v_1 = (2,1,0), v_2 = (-2,0,1)$. Baza ta nie jest jednak ortogonalna. Możemy ją zortogonalizować stosując proces ortogonalizacji Grama-Schmidta. Definiujemy: $w_1 = v_1 = (2,1,0)$, $w_2 = v_2 - \frac{w_1 \circ v_2}{w_1 \circ w_1} w_1 = (-2,0,1) - \frac{-4}{2^2+1^2+0^2}(2,1,0) = (-2/5, 4/5, 1)$. Po unormowaniu otrzymujemy bazę ortonormalną W złożoną z wektorów $U_1 = \frac{1}{||w_1||} w_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,1,0)$, $u_2 = \frac{1}{||w_2||} = \frac{5}{\sqrt{45}}(-2/5, 4/5, 1)$. Ponieważ $W^\perp = lin((1,-2,2))$ (wynika to z opisu W przy pomocy równania liniowego jednorodnego), baze ortonormalną $W^\perp$ stanowi unormowanie wektora $(1,-2,2)$ czyli wektor $a = \frac{1}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}(1,-2,2) = (1/3, -2/3, 2/3)$

c) można skorzystać z bazy ortonormalnej W i obliczyć rzut prostopadły wektora $v = (1,1,1)$ na W jako $(u_1 \circ v)u_1 + (u_2 \circ v)u_2$. Ale rachunkowo prościej jest obliczyć rzut prostopadły wektora v na $W^\perp$ jako $(a \circ v)a = \frac{1}{3}(1/3, -2/3, 2/3) = (1/9, -2/9, 2/9)$. W sumie oba rzuty prostopadłe wektora v, jeden na W drugi na $W^\perp$ dają v. Zatem rzut na W to $(1,1,1) - (1/9, -2/9, 2/9) = (8/9, 11/9, 7/9)$ (proszę również obliczyć pierwsza metodą)

Zadanie 8 Macierzą współczynników układu $\mathcal{U}$ jest $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Kolumny nr 1 i nr 3, tzn. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ tworzą dwuelementowy układ liniowo niezależny, zatem zbiór $\mathcal{B}_1 = \{1,3\}$ jest bazowy (są 2 równania układu). Podobnie, rozpatrując kolumny nr 2 i nr 3, czyli $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ stwierdzamy, że zbiór $\mathcal{B}_2 = \{2,3\}$ jest również bazowy. Rozwiązanie bazowe odpowiadające $\mathcal{B}_1$ otrzymamy, jeśli w układzie $\mathcal{U}$ za wszystkie zmienne niebazowe (tzn. niezależne) podstawimy 0. Zmienne bazowe dla $\mathcal{B}_1$ to x_1 i x_3, niebazowe to pozostałe, czyli x_2, x_4, x_5. Zatem otrzymujemy $x_2 = x_4 = x_5 = 0$, $x_1 = 5$,$x_3 = 1$. Rozwiązanie bazowe to $(5,0,1,0,0)$. Ponieważ wszystkie zmienne przyjęły wartości≥ 0 jest ono dopuszczalne. W przypadku rozwiązania bazowego względem $\mathcal{B}_2$ zmienne niebazowe $x_1 = x_4 = x_5 = 0$, czyli $2x_2 = 5, x_2 + x_3 = 1$, skąd $x_2 = 5/2$ i $x_3 = -3/2 < 0$. Zatem to rozwiązanie, mianowicie $(0, 5/2, -3/2, 0, 0)$ jest niedopuszczalne. b)

Metoda sympleks polega na tym, że poczynając od pewnego rozwiązania bazowego dopuszczalnego, przechodzimy do kolejnego, nie gorszego (tzn. wartość funkcji celu nie wzrasta) rozwiązania bazowego dopuszczalnego, tak, że jedna z dotychczasowych zmiennych niebazowych zmienia się w bazową, zastępując w tej roli pewną inną zmienną. Postępowanie to kontynuujemy tak długo, dopóki nie ze osiągniemy minimum funkcji celu. Z części a) wiemy, że rozwiązanie bazowe $\mathcal{B}_1 = \{1, 3\}$ jest dopuszczalne. Rozwiązanie to otrzymujemy, traktując zmienne x_1, x_3 jako bazowe, czyli zależne, a wartość pozostałych zmiennych – niezależnych przyjmując=0. Zapiszmy odpowiednie rozwiązanie ogólne: $\mathcal{S}$: $\begin{cases} x_1 = & 5 - 2x_2 - x_4 - 4x_5 \\ x_3 = & 1 - x_2 - 2x_4 - x_5 \end{cases}$. Funkcję celu $f = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5$, wyraźmy, zgodnie z powyższym rozwiązaniem ogólnym przez zmienne niezależne x_2, x_4, x_5. Czyli $f = 2(5-2x_2-x_4-4x_5)+ 3x_2+(1-x_2-2x_4-x_5)+4x_4+x_5 = 11-2x_2-8x_5$. W rozwiązaniu bazowym $x_2 = x_5 = 0$, zatem $f = 11$. Z postaci f widzimy, że możemy zmniejszyć tę wartość, jedynie zmieniając x_2 lub x_5 z 0 na liczbę dodatnią. Czyli powinniśmy wybrać jedną ze zmiennych x_2, x_5 na nową zmienną bazową (zależną). Wybieramy x_5, kierując się tym, że współczynnik przy niej w zapisie $f = 11-2x_2-8x_5$, czyli -8 jest mniejszy niż -2 – współczynnik przy x_2. Musimy rozstrzygnąć również, która ze zmiennych x_1, x_3 przestanie być bazowa. Jest to zdeterminowane przez to, by nowe rozwiązanie bazowe było dopuszczalne. Z pierwszego równania rozwiązania ogólnego $\mathcal{S}$ tzn. $x_1 = 5 - 2x_2 - x_4 - 4x_5$ widzimy, że musi być $x_1 \leq 5/4$ (bo inaczej $x_1 < 0$), zaś z drugiego, $x_3 = 1 - x_2 - 2x_4 - x_5$ widzimy, że musi być $x_1 \leq 1$ (bo inaczej $x_3 < 0$). Ponieważ to drugie równanie bardziej ogranicza, zatem z niego wyznaczymy x_5, mianowicie $x_5 = 1 - x_2 - x_3 - 2x_4$, zaś x_3 przestanie być zmienną bazową. Odpowiednio modyfikujemy 1 równanie: $x_1 = 5 - 2x_2 - x_4 - 4(1 - x_2 - x_3 - 2x_4) = 1 + 2x_2 + 4x_3 + 7x_4$ Stąd, nowy zbiór bazowy to $\{1, 5\}$, odpowiednie rozwiązanie ogólne to $\mathcal{S}$: $\begin{cases} x_1 = & 1 + 2x_2 + 4x_3 + 7x_4 \\ x_5 = & 1 - x_2 - x_3 - 2x_4 \end{cases}$. Wyrażamy funkcję celu przez nowe zmienne niezależne (niebazowe) x_2, x_3, x_4: $f = 11 - 2x_2 - 8(1 - x_2 - x_3 - 2x_4) = 3 + 6x_2 + 8x_3 + 16x_4$. Z tej postaci funkcji celu widzimy, że może ona osiągnąć najmniejsza wartość= 3 jedynie jeśli zmienne x_2, x_3, x_4 przyjmą wartość 0 (w zbiorze dopuszczalnym wszystkie zmienne są ≥ 0) Czyli nowe rozwiązanie bazowe $(1, 0, 0, 0, 1)$ jest optymalne i min $= f((1, 0, 0, 0, 1)) = 3$. To rozwiązanie metodą sympleks można również zapisać sposobem tabelkowym. Układ $\mathcal{U}$ rozszerzymy o równanie $z-(2x_1+3x_2+x_3+4x_4+x_5) = 0$, czyli $z-2x_1-3x_2-x_3-4x_4-x_5 = 0$, gdzie z jest nową zmienna reprezentującą wartość funkcji celu. Macierz tego układu

to $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -1 & -4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, w której pierwsza kolumna reprezentuje współczynniki przy z. Ponieważ jednak kolumna ta nie będzie ulegała zmianie w ciągu dalszych przekształceń pominiemy ją i będziemy przekształcać tylko macierz $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & -3 & -1 & -4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. Ostatni wiersz będziemy oznaczać w_f i nie będziemy go nigdy przestawiać z innymi wierszami. Pierwszy zbiór bazowy to $\mathcal{B}_1 = \{1, 3\}$. Wpierw sprowadzimy macierz M do postaci sympleksowej , tzn. takiej, że każda z kolumn bazowych,czyli nr 1 i nr 3 ma tylko jeden element $\neq 0$. Dokonamy tego przy pomocy operacji $w_f + 2w_1 + w_2$. otrzymamy macierz $M' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 8 & 11 \end{bmatrix}$.
W ostatniej kolumnie w w_f mamy 11, oznacza to że funkcja celu przyjmuje tę wartość w początkowym punkcie bazowym dopuszczalnym. W wierszu funkcji celu mamy współczynniki dodatnie w 2 i 5 kolumnie (odpowiednio 2 i 8). Ponieważ $8 > 2$ wybieramy jako nową zmienną bazową x_5. Wykonujemy teraz tzw. test ilorazów, tzn. dzielimy elementy ostatniej kolumny (kolumny stałych) przez odpowiednie elementy 5 kolumny, o ile są one > 0 i znajdujemy, któremu wierszowi odpowiada najmniejszy z ilorazów. Tu dla pierwszego wiersza mamy $5/4$, dla drugiego $1/1$. Ponieważ ten drugi iloraz jest mniejszy, wybieramy drugi wiersz jako "aktywny". Będziemy nim działać na pozostałe wiersze (tzn. do innych wierszy będziemy dodawać drugi wiersz mnożony przez odpowiednie liczby), tak by sprowadzić macierz do postaci sympleksowej względem nowej zmiennej bazowej. Zmienną bazową przestanie być x_3, bo w 2 wierszu znajduje się niezerowy element dotychczas bazowej 3 kolumny. Wykonamy więc operacje $w_f - 8w_2$ i $w_1 - 4w_2$. Otrzymamy macierz sympleksową $M'' = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 & -7 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -8 & -16 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Ponieważ teraz wszystkie współczynniki w w_f są ≤ 0 zatem osiągamy $\min = 3$ (wyraz stały w w_f) w punkcie bazowym dopuszczalnym $(1, 0, 0, 0, 1)$.