1. Niech $W \subset \mathbf{R}^4$ będzie przestrzenią rozwiązań układu równań
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 3x_4 &= 0 \end{cases}$$
a) Znaleźć wymiar przestrzeni W.
b) Czy istnieje taka baza przestrzeni W, że pierwszym wektorem tej bazy jest $(1,1,1,1)$? Jeśli tak, to podać przykład takiej bazy, jeśli nie to dlaczego?
c) Dla jakich wartości parametru $s \in \mathbf{R}$ istnieje w przestrzeni $\mathbf{R}^4$ układ liniowo niezależny $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ taki, że $\alpha_1 = (3, s, 2, 1),\ \alpha_2 \in W,\ \alpha_3 \in W$?

2. Niech $V = \mathrm{lin}((1,2,1,3),(2,5,6,7),(4,9,8,13)),\ W_t = \mathrm{lin}((1,1,-3,2),(2,3,-2,t))$.
a) Znaleźć bazę i wymiar przestrzeni V.
b) Znaleźć układ równań liniowych opisujący V.
c) Dla jakich $t \in \mathbf{R}$ zachodzi równość $V = W_t$?

3. Niech $V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid 3x_1 - 4x_2 - x_3 = 0\}$.
a) Podać przykład takiej bazy przestrzeni V, w której wektor $(2,1,2) \in V$ ma współrzędne 1,3.
b) Czy istnieje baza przestrzeni V taka, że wektor $(2,1,2) \in V$ ma w tej bazie współrzędne $1,3$ a wektor $(4,1,8) \in V$ współrzędne $-1,-3$? Jeśli tak, to podać przykład takiej bazy, jeśli nie to dlaczego?

4. Rozpatrzmy przekształcenie liniowe $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, $\varphi((x_1,x_2,x_3)) = (2x_1 + x_2 - x_3, x_1 + 3x_2 + x_3)$.
a) Znaleźć macierz przekształcenia φ w bazach $\mathcal{A} = \{(1,-1,1),(0,1,2),(1,0,1)\}$, $\mathcal{B} = \{(3,1),(1,0)\}$.
b) Niech $\alpha \in \mathbf{R}^3$ będzie wektorem mającym w powyższej bazie $\mathcal{A}$ współrzędne $3,-2,1$. Znaleźć współrzędne wektora $\varphi(\alpha)$ w bazie $\mathcal{B}$.
c) Podać przykład baz: $\mathcal{C}$ przestrzeni $\mathbf{R}^3$ oraz $\mathcal{D}$ przestrzeni $\mathbf{R}^2$ takich, że $M(\varphi)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

5. Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 7 & 6 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 7 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & r \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$.
a) Obliczyć $\det A$ oraz $\det(A^3 \cdot B)$.
b) Dla jakich wartości parametru $r \in R$ macierz $B \cdot A \cdot B \cdot A \cdot B$ jest odwracalna?

6. Niech $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$.
a) Niech $\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ będzie endomorfizmem zadanym warunkiem $M(\varphi)_{\mathrm{st}}^{\mathrm{st}} = A$. Czy istnieje baza przestrzeni $\mathbf{R}^2$ złożona z wektorów własnych endomorfizmu φ? Jeśli tak, to dać przykład takiej bazy $\mathcal{B}$ i obliczyć $M(\varphi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.
b) Czy istnieje macierz $C \in M_{2\times 2}(\mathbf{R})$ taka, że $C^{-1} \cdot A \cdot C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$? Jeśli tak, to podać przykład takiej macierzy C.
c) Obliczyć A^{200}.

7. Niech $W = \{(x_1,x_2,x_3) \in R^3 \mid x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0\}$.
a) Znaleźć bazę ortonormalną przestrzeni W oraz bazę ortonormalną przestrzeni $W^\perp$.
b) Znaleźć rzut prostopadły wektora (1,1,1) na W.

8. Dane jest zadanie programowania liniowego: $2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 \to \min$ przy warunkach
$$\mathcal{U} : \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 + 4x_5 &= 5 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 &= 1 \end{cases} \quad \text{oraz} \quad x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, 5.$$
a) Niech $\mathcal{B}_1 = \{1,3\},\ \mathcal{B}_2 = \{2,3\}$. Czy $\mathcal{B}_1$ jest zbiorem bazowym dla tego zadania? Jeśli tak, to znaleźć rozwiązanie bazowe względem $\mathcal{B}_1$. Czy rozwiązanie to jest dopuszczalne? To samo dla $\mathcal{B}_2$.
b) Rozwiązać metodą sympleks powyższe zadanie programowania liniowego.