Egzamin z algebry WNE, B

31 stycznia 2020

Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce. Na każdej kartce z rozwiązaniem powinno być:

- imię i nazwisko osoby zdającej oraz jej numer indeksu,
- numer grupy ćwiczeniowej do której osoba zdająca uczęszczała,
- numer rozwiązywanego zadania oraz litera - nazwa tematu.

W zadaniach 1,2,3 odpowiedzi należy uzasadnić.

Zadanie 1.
Dane są macierze $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, przy czym A nie jest odwracalna, a B jest odwracalna.
a) Czy $A \cdot B$ jest odwracalna?
b) Czy istnieje układ równań liniowych o macierzy współczynników A, który ma jednoznaczne rozwiązanie?

Zadanie 2.
a) α jest wektorem własnym endomorfizmu $\varphi : V \to V$. Czy α jest wektorem własnym $\varphi \circ \varphi$?
b) Macierz $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ jest diagonalizowalna. Czy macierz A^6 jest diagonalizowalna?

Zadanie 3. Układ wektorów $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ jest bazą przestrzeni V. Niech $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $\beta_2 = \alpha_2$, $\beta_3 = \alpha_3$ oraz niech $\gamma_1 = \alpha_1 + \alpha_2$, $\gamma_2 = \alpha_2 + \alpha_3$, $\gamma_3 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3$
a) Czy układ $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ rozpina przestrzeń V?
b) Czy układ $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ jest liniowo niezależny?

Zadanie 4.
Zadano macierze: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 3 \\ 3 & 9 & 7 & 1 \\ 2 & 9 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 11 & 3 \\ 0 & 1 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$
a) Obliczyć $\det A$
b) Obliczyć $\det(B^7 \cdot (B^\top)^{-5})$

Zadanie 5. Dane są endomorfizmy $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, zadany wzorem $\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 + 3x_2 + 2x_3, x_3)$ oraz $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zależny od parametru t, zadany wzorem
$\psi((x_1, x_2)) = (x_1 + x_2, tx_1 + x_2)$
a) Znaleźć wartości własne φ oraz bazy odpowiednich podprzestrzeni własnych .
b) Określić zbiór tych wartości $t \in \mathbb{R}$, dla których wektor $(1, 2)$ jest wektorem własnym ψ.

Zadanie 6. Rozważmy podprzestrzeń $V = lin((1, 1, -1, 1), (2, 3, -1, 2), (-2, -3, 1, -2)) \subset \mathbb{R}^4$ oraz wektor $w = (0, 0, 3, 0)$
a) Znaleźć bazę ortonormalną V
b) Obliczyć rzut prostopadły w na V oraz obraz w w symetrii prostopadłej względem V

Zadanie 7. Określono formy kwadratowe $p, q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Forma p zależna od parametru $t \in \mathbb{R}$ zadana jest wzorem $p(x_1, x_2, x_3) = -3x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 + 2tx_1x_2 + 2x_2x_3$ zaś $q(x_1, x_2, x_3) = -2x_2^2 + 2x_1x_3$

a) Określić zbiór wartości parametru $t \in \mathbb{R}$, dla których p jest ujemnie określona.

b) Zbadać czy forma q jest ujemnie półokreślona.

Zadanie 8.

Określono zadanie programowania liniowego: $2x_2 + 5x_4 + 7x_5 \to \min$

przy warunkach $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 + 2x_5 = 5 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_5 = 3 \end{cases}$ oraz $x_i \geq 0$ dla $i = 1, \ldots, 5$

a) Określić czy zbiory $\mathcal{B}_1 = \{1, 5\}$, $\mathcal{B}_2 = \{2, 3\}$, $\mathcal{B}_3 = \{3, 4\}$ są bazowe. Dla tych z nich, które są bazowe zbadać czy odpowiadające im rozwiązania bazowe są dopuszczalne.

b) Rozwiązać podane zadanie programowania liniowego metodą sympleks.