Egzamin z algebry WNE, A

2 marca 2018

Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce. Na każdej kartce z rozwiązaniem powinno być:

- imię i nazwisko osoby zdającej oraz jej numer indeksu,
- numer grupy ćwiczeniowej do której osoba zdająca uczęszczała,
- numer rozwiązywanego zadania oraz litera - nazwa tematu.

Zadanie 1. a) Dany jest endomorfizm $\varphi : V \to V$. Wektor $v \in V$ jest wektorem własnym φ dla wartości własnej 5. Czy v musi być wektorem własnym $\varphi \circ \varphi$, a jeśli tak to dla jakiej wartości własnej?

b) Czy istnieją macierze odwracalne $A, B \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$, takie, że macierz $A + B$ nie jest odwracalna?

Odpowiedzi uzasadnić.

Zadanie 2. W przestrzeni $\mathbb{R}^4$ zadane są wektory $v_1 = (1, 0, 1, 0)$, $v_2 = (4, 1, 0, 1)$. Niech $V = lin(v_1, v_2)$

a) Podać bazę ortonormalną V oraz układ równań liniowych opisujących $V^\perp$

b) Podać wzór rzutu prostopadłego na V.

Zadanie 3. Niech $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$

a) Czy istnieje macierz D diagonalna podobna do macierzy A? Jeśli tak to podać taką macierz. Uzasadnić odpowiedź.

b) Podać A^{100}

Zadanie 4. W $\mathbb{R}^2$ określono pewną bazę $\mathcal{A}$ oraz bazy $\mathcal{B} = \{(1, -1), (1, -2)\}$ i $\mathcal{C} = \{(3, 1), (1, 0)\}$. Przekształcenie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zdefiniowano macierzą $M(f)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$. Znana jest również macierz zamiany współrzędnych $M(id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

a) Obliczyć $f((4, 1))$

b) Znaleźć macierz $M(f)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}}$

Zadanie 5. Zadano macierz $A_t = \begin{bmatrix} 1 & t & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 7 \end{bmatrix}$, zależną od parametru $t \in \mathbb{R}$.

a) Określić, dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$ macierz ta nie jest odwracalna.

b) Obliczyć A_t^{-1} dla $t = 2$

Zadanie 6. Dane są macierze: $B_t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & t & 1 \\ 4 & 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 10 & 5 & 8 \\ 0 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

a) Dla jakiego $t \in \mathbb{R}$ zachodzi $\det B_t = 10$.

b) Dobrać k całkowite tak, aby $\det(C^k(C^\top)^5) = 1/12$

Zadanie 7. Rozważmy układ $U : \begin{cases} 3x_1 + & tx_2 + & 3x_3 & = 1 \\ 2x_1 + & 4x_2 + & tx_3 & = 0 \\ 4x_1 & + & 2x_3 & = 1 \end{cases}$.

Określić:

a) dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$ układ U ma dokładnie jedno rozwiązanie

b) dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$ układ U jest niesprzeczny

Zadanie 8.

Określono zadanie programowania liniowego: $3x_3 + x_5 \to \min$ przy warunkach $\begin{cases} & 2x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & = 4 \\ x_1 & +3x_2 & & +3x_4 & +2x_5 & = 3 \end{cases}$ oraz $x_i \geq 0$ dla $i = 1, \ldots, 5$

a) Dla zbiorów bazowych $\mathcal{B}_1 = \{1, 2\}$, $\mathcal{B}_2 = \{1, 3\}$ zbadać czy odpowiadające im rozwiązania bazowe są dopuszczalne.

b) Rozwiązać podane zadanie programowania liniowego metodą sympleks.