Egzamin z algebry WNE, A

8 lutego 2018

Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce. Na każdej kartce z rozwiązaniem powinno być:
- imię i nazwisko osoby zdającej oraz jej numer indeksu,
- numer grupy ćwiczeniowej do której osoba zdająca uczęszczała,
- numer rozwiązywanego zadania oraz litera - nazwa tematu.

Zadanie 1. a) Wektor β ma w bazie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ współrzędne $2, 3, 1$, a wektor γ ma w tej bazie współrzędne $1, 2, 4$. Ile wynoszą współrzędne wektora $2\beta - \gamma$ w bazie $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$?

b) $\varphi : V \to W$ jest przekształceniem liniowym. Dla wektorów $\alpha_1, \alpha_2 \in V$ niech $\varphi(\alpha_1) = \beta_1$, $\varphi(\alpha_2) = \beta_2$. Wektor γ jest kombinacją liniową wektorów α_1, α_2. Czy wektor $\varphi(\gamma)$ jest kombinacją liniową wektorów β_1, β_2? Odpowiedź uzasadnić.

Zadanie 2. Niech podprzestrzeń $W \subset \mathbb{R}^4$ będzie opisana układem równań liniowych jednorodnych: $\left\{ \begin{array}{lllll} x_1 & +2x_2 & +2x_3 & +2x_4 & = 0 \\ 2x_1 & +4x_2 & +3x_3 & -x_4 & = 0 \end{array} \right.$

a) Dane są wektory przestrzeni $\mathbb{R}^4$: $w_1 = (-2, 1, 0, 0), w_2 = (1, 0, 0, 1), w_3 = (6, 1, -5, 1), w_4 = (4, 2, -5, 1)$. Czy spośród tych wektorów można wybrać bazę W? Jeśli tak, to podać taką bazę. Odpowiedź uzasadnić.

b) Podać, dla jakich $t \in \mathbb{R}$ zachodzi zawieranie $lin((14, t, -5, 1)) \subset W$

Zadanie 3. W przestrzeni $\mathbb{R}^5$ zadano wektory $v_1 = (1, 1, 1, 1, 1), v_2 = (1, 0, 2, 0, 1), v_3 = (-1, 2, -4, 2, -1)$. Niech $V = lin(v_1, v_2, v_3)$.

a) Podać wymiar V oraz układ równań liniowych jednorodnych opisujący V.

b) Podać taką bazę V, w której wektor v_1 ma wszystkie współrzędne równe 1.

Zadanie 4. W $\mathbb{R}^3$ określono pewną bazę $\mathcal{A}$, natomiast w $\mathbb{R}^2$ określono bazy $\mathcal{B} = \{(1, 1), (1, 2)\}$ oraz $\mathcal{C} = \{(2, 1), (1, 0)\}$. Przekształcenie

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ zdefiniowano macierzą $M(f)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, zaś $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ macierzą $M(g)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

a) Wyznaczyć macierz $M \in M_{(2\times 2)}(\mathbb{R})$ o następującej własności: jeśli wektor $v \in \mathbb{R}^2$ ma w bazie $\mathcal{B}$ współrzędne x_1, x_2 zaś w bazie $\mathcal{C}$ współrzędne y_1, y_2 to $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = M \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

b) Obliczyć macierz złożenia $M(g \circ f)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}}$

Zadanie 5. Określono endomorfizm $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ wzorem $\phi((x_1, x_2, x_3)) = (3x_1 + 2x_2 + x_3, 2x_1 + 6x_2 + 2x_3, 2x_3)$.

a) Znaleźć wszystkie wartości własne endomorfizmu ϕ oraz podać bazy odpowiednich podprzestrzeni własnych.

b) Czy istnieje taka baza $\mathcal{B}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$, że $M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix}$, gdzie$s \in \mathbb{R}$. Jeśli tak, to podać taką bazę $\mathcal{B}$. Czemu musi równać się s?

Zadanie 6.

a) Znaleźć parametryzację prostej afinicznej $L = (1, 0, 2, 0) + lin((1, -1, 1, 1))$ oraz układ równań liniowych opisujących L.

b) Znaleźć równanie trójwymiarowej podprzestrzeni afinicznej H, która jest prostopadła do L i przechodzi przez punkt $Q = (0, 1, 0, 0)$. Obliczyć rzut prostopadły punktu Q na L.

Zadanie 7. Niech $q_t, p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, będą formami kwadratowymi: $q_t((x_1, x_2, x_3)) = -2x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + 2tx_1x_2 + 4x_2x_3$ dla $t \in \mathbb{R}$, $p((x_1, x_2, x_3)) = 4x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2$.

a) Zbadać, dla jakich $t \in \mathbb{R}$ forma q_t jest ujemnie określona

b) Sprawdzić czy forma p jest dodatnio półokreślona. Czy jest dodatnio określona? Odpowiedzi uzasadnić.

Zadanie 8.

Określono zadanie programowania liniowego: $3x_1 + 3x_4 - 5x_5 \to \min$ przy warunkach $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 2 \\ x_1 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 5 \end{cases}$ oraz $x_i \geq 0$ dla $i = 1, \ldots, 5$

a) Dla zbiorów bazowych $\mathcal{B}_1 = \{1, 2\}$, $\mathcal{B}_2 = \{2, 4\}$ zbadać czy odpowiadające im rozwiązania bazowe są dopuszczalne.

b) Rozwiązać podane zadanie programowania liniowego metodą sympleks.