Egzamin z algebry WNE, A

9 marca 2017

Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce. Na każdej kartce z rozwiązaniem powinno być:
- imię i nazwisko osoby zdającej oraz jej numer indeksu,
- numer grupy ćwiczeniowej do której osoba zdająca uczęszczała,
- numer rozwiązywanego zadania oraz litera - nazwa tematu.

Zadanie 1. Układ wektorów α_1, α_2, α_3 jest bazą przestrzeni V.

a) Czy istnieje wektor $\gamma \in lin(\alpha_1, \alpha_2)$, taki, że układ wektorów $\alpha_1, 2\alpha_2, 3\gamma$ jest bazą przestrzeni V?

b) Niech $\beta_1 = \alpha_1 + a\alpha_2$, $\beta_2 = \alpha_1 + b\alpha_3$.

Czy dla każdych niezerowych liczb $a, b \in \mathbb{R}$ układ wektorów β_1, β_2 jest liniowo niezależny?

Odpowiedzi uzasadnić.

Zadanie 2. Niech $V = lin((1,2,1,1),(3,6,3,3),(1,1,0,1),(2,4,3,2))$.

a) Określić wymiar przestrzeni V i podać jej bazę złożoną z wektorów $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ spełniających $x_1 + x_4 = 4$.

b) Znaleźć równanie, bądź układ równań liniowych opisujących V.

Zadanie 3. Zadano podprzestrzeń $W = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 - 3x_3 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$.

a) Obliczyć rzut prostopadły wektora $(0, 11, 0)$ na W

b) Uzupełnić wektor $(1, 2, 1)$ do bazy ortogonalnej (czyli prostopadłej) przestrzeni W.

Zadanie 4. Niech $\mathcal{A} = \{(1,0,1),(-1,-1,-1),(1,1,2)\}$ będzie bazą $\mathbb{R}^3$ zaś $\mathcal{B} = \{(3,1),(1,0)\}$ bazą $\mathbb{R}^2$. Ponadto mamy przekształcenia liniowe $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, określone macierzą $M(f)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

oraz $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, określone macierzą $M(g)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, gdzie $\mathcal{C}$ oznacza pewną bazę $\mathbb{R}^2$.

a)Znaleźć wzór na $f((x_1, x_2))$

b) Obliczyć $M(f \circ g)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{A}}$.

Zadanie 5. Określono formy kwadratowe $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $p(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - 5x_2^2 - 10x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_2x_3$, oraz $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 3x_4^2 + 4x_1x_3$

a) zbadać czy forma p jest dodatnio lub ujemnie określona

b) zbadać czy forma q jest dodatnio lub ujemnie półokreślona.

Odpowiedzi uzasadnić.

Zadanie 6. a) Zadano endomorfizm $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ wzorem $\phi((x_1, x_2, x_3)) = (2x_2, 3x_1+5x_2, x_1+2x_2-x_3)$. Znaleźć wartości własne ϕ oraz bazy odpowiednich podprzestrzeni własnych. Czy istnieje baza $\mathcal{A}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$, w której macierz $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ jest diagonalna? Jeśli tak, to podać taką bazę oraz macierz ϕ w tej bazie .

b) Endomorfizm $\psi_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zależny od parametru $t \in \mathbb{R}$ zadano wzorem $\psi_t((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + 3x_2, 2x_1 + 2x_2, -x_2 + tx_3)$. Znaleźć wartość $t \in \mathbb{R}$, dla której wektor $(1, 1, 1)$ jest wektorem własnym ψ_t

Zadanie 7. a) Niech $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ spełnia $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ oraz niech $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 17 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

a) Obliczyć $\det(A^2(A^{-1} - B)^{2017})$

b) Znaleźć macierz $X \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ spełniającą $(X + B)A = I$, gdzie I oznacza macierz jednostkową 3×3.

Zadanie 8.

a) Znaleźć postać standardową zadania programowania liniowego : $2x_2 - x_4 + x_3 \to \max$,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 - x_2 \geq 7 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_4 \geq 0$

b)Określono zadanie programowania liniowego w postaci standardowej: $x_3 + x_5 \to \min$, przy warunkach:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 6x_3 + x_5 = 7 \end{cases} \quad \text{oraz } x_i \geq 0 \text{ dla } i = 1, \ldots, 5$$

Rozwiązać podane zadanie programowania liniowego metodą sympleks.