Egzamin z algebry WNE, A

9 lutego 2017

Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce. Na każdej kartce z rozwiązaniem powinno być:

- imię i nazwisko osoby zdającej oraz jej numer indeksu,
- numer grupy ćwiczeniowej do której osoba zdająca uczęszczała,
- numer rozwiązywanego zadania oraz litera - nazwa tematu.

Zadanie 1. Układ wektorów $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ jest bazą przestrzeni V.

a) Niech $\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2$, $\beta_2 = \alpha_3 + \alpha_4$. Czy układ β_1, β_2 jest liniowo niezależny?

b) Niech $\gamma_1 = \alpha_1 + \alpha_2$, $\gamma_2 = \alpha_3$, $\gamma_3 = \alpha_4$. Czy istnieje taka baza przestrzeni V, że każdy wektor tej bazy jest kombinacją liniową wektorów $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$?

Odpowiedzi należy uzasadnić.

Zadanie 2. Podprzestrzeń $W \subset \mathbb{R}^5$ jest opisana układem równań:

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & -x_3 & -2x_4 & +x_5 & = 0 \\ 2x_1 & +4x_2 & -3x_3 & +x_4 & -2x_5 & = 0 \\ 4x_1 & +8x_2 & -5x_3 & -3x_4 & & = 0 \end{cases}$$

.

a) Określić wymiar przestrzeni W i podać taką bazę przestrzeni W, w której wektor $(2, -1, 0, 0, 0)$ ma wszystkie współrzędne równe 1.

b) Czy przestrzeń W zawiera się w
$\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) : x_3 - 5x_4 + 4x_5 = 0\} \subset \mathbb{R}^5$? Odpowiedź uzasadnić.

Zadanie 3. W $\mathbb{R}^3$ określono bazę $\mathcal{A} = \{(1, 4, 1), (2, 1, 0), (3, 1, 0)\}$, natomiast w $\mathbb{R}^2$ bazę $\mathcal{B} = \{(1, -2), (0, 1)\}$ oraz pewną bazę $\mathcal{C}$, taką, że macierz zamiany współrzędnych $M(id)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Przekształcenie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ zadano macierzą $M(f)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, natomiast przekształcenie $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadano macierzą $M(g)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Obliczyć $f((0,7,2))$

b) Wyznaczyć $M(g \circ f)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$

Zadanie 4.

Zadana jest macierz $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$

a) Znaleźć takie macierze D i $C \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, że D jest diagonalna zaś C jest odwracalna i $D = C^{-1}AC$.

b) Obliczyć A^{100} .

Zadanie 5.

Niech w $\mathbb{R}^4$ zadana będzie prosta afiniczna $L = (3,2,0,0)+lin((1,0,1,0))$ oraz punkt $Q = (1,0,0,1)$

a) Znaleźć parametryzację prostej L oraz równanie hiperpłaszczyzny E prostopadłej do L przechodzącej przez punkt Q

b) Obliczyć rzut prostopadły punktu Q na L

Zadanie 6. Zadano macierz $A_t = \begin{bmatrix} 3 & t & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ t & 5 & 5 \end{bmatrix}$, zależną od parametru $t \in \mathbb{R}$. Określić, dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$ macierz ta nie jest odwracalna.

b) Obliczyć A_t^{-1} dla $t = 4$

Zadanie 7.

a) Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ forma kwadratowa $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,
$q(x_1,x_2,x_3) = tx_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$ jest dodatnio określona?

b) Czy forma kwadratowa $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $p(x_1,x_2,x_3) = 2x_1x_2 + 2x_2x_3$ jest ujemnie półokreślona?

Zadanie 8.

Określono zadanie programowania liniowego w postaci standardowej:

$x_1 + 3x_2 - 4x_5 \to \min$, przy warunkach:

$$\begin{cases} 2x_1 & & +x_3 & +x_4 & +x_5 & = 2 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & & +2x_5 & = 5 \end{cases} \quad \text{oraz } x_i \geq 0 \text{ dla } i = 1,\ldots,5$$

a) Które spośród zbiorów zbiorów $\mathcal{B}_1 = \{1,3\}$, $\mathcal{B}_2 = \{2,4\}$, $\mathcal{B}_3 = \{4,5\}$ są bazowe? Zbadać czy odpowiadające zbiorom bazowym rozwiązania bazowe są dopuszczalne.

b) Rozwiązać podane zadanie programowania liniowego metodą sympleks.