Egzamin z algebry WNE, A

3 lutego 2016

Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce. Na każdej kartce z rozwiązaniem powinno być:

- imię i nazwisko osoby zdającej oraz jej numer indeksu,
- numer grupy ćwiczeniowej do której osoba zdająca uczęszczała,
- numer rozwiązywanego zadania oraz litera - nazwa tematu.

Zadanie 1. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ pewne wektory v_1, v_2, v_3 tworzą bazę ortonormalną $\mathcal{B}$ tej przestrzeni. Niech $V = lin(v_1, v_2)$ i niech $w = v_1 + 2v_2 + 3v_3$.

a) Ile wynosi iloczyn skalarny wektorów v_2 i w ?

b) Jakie są współrzędne w bazie $\mathcal{B}$ rzutu prostopadłego wektora w na przestrzeń V?

Odpowiedzi należy uzasadnić.

Odp. a) Zgodnie z twierdzeniem udowodnionym na wykładzie i-ta współrzędna wektora w w bazie ortonormalnej $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ to iloczyn skalarny w przez v_i. Zatem, ponieważ druga współrzędna w w $\mathcal{B}$ to 2, zatem jest to wartość iloczynu skalarnego v_2 przez w. Można też było po prostu wymnożyć $v_2 \cdot w = v_2 \cdot (v_1 + 2v_2 + 3v_3) = v_2 \cdot v_1 + 2v_2 \cdot v_2 + 3v_2 \cdot v_3 = 2$, gdyż z ortonormalności $v_i \cdot v_j = 0$ dla $i \neq j$ i $v_i \cdot v_i = 1$. (dla tematu B iloczyn= 3)

b) wektory $v_1 + 2v_2 \in V$ oraz $3v_3 \in V^{\perp}$ dają w sumie wektor w, zatem pierwszy z nich jest rzutem prostopadłym w na V, a drugi rzutem prostopadłym w na $V^{\perp}$. Stąd szukane współrzędne w bazie $\mathcal{B}$ to $1, 2, 0$. (dla tematu B współrzędne są $1, 0, 3$)

Zadanie 2. W przestrzeni $\mathbb{R}^4$ zadane są wektory $v_1 = (1, 1, 2, 1), v_2 = (-1, 0, -2, -1), v_3 = (2, 4, 4, 2), v_4 = (3, 3, 6, 3)$ oraz wektor $w_t = (2, 1, t, 2)$ zależny od $t \in \mathbb{R}$. Niech $V = lin(v_1, v_2, v_3, v_4)$

a) Znaleźć wymiar przestrzeni V oraz układ równań liniowych opisujących V.

odp. a) Łatwo sprawdzić, że wektory v_3 i v_4 są kombinacjami liniowymi v_1 i v_2 zatem niezależne liniowo wektory v_1 i v_2 tworzą bazę V i stąd $\dim V =$

2. Utwórzmy macierz $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$, w której wiersz 2 to v_1 zaś wiersz 3 to v_2. Ponieważ minor $\det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \neq 0$ zatem otrzymujemy układ dwóch równań opisujących $V = lin(v_1, v_2)$: $\det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} = 0$, $\det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_4 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 0$, czyli $-2x_1 + x_3 = 0$ i $-x_1 + x_4 = 0$. (dla tematu B: dim=2, równania $x_3 - x_4 = 0, x_1 - 2x_3 = 0$)

b) Dla jakich wartości $t \in \mathbb{R}$ zachodzi $lin(w_t) \subset V$?

odp. Podstawiając wektor w_t do znalezionych w części a) równań znajdujemy, że $t = 4$.(tak samo w temacie B)

Zadanie 3. Podprzestrzeń $W \subset \mathbb{R}^4$ jest opisana układem równań:

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & -x_3 & -2x_4 & = 0 \\ 2x_1 & +4x_2 & -3x_3 & +x_4 & = 0 \end{cases}$$

.

a) Wyznaczyć pewną bazę przestrzeni W i określić wymiar W.

b)Niech $U_s = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : 4x_1 + 8x_2 - 5x_3 + sx_4 = 0\} \subset \mathbb{R}^4$ będzie podprzestrzenią zależną od $s \in \mathbb{R}$. Dla jakich wartości $s \in \mathbb{R}$ zachodzi $W \subset U_s$?

odp. a) Sprowadzamy macierz współczynników układu $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ przekształceniami wierszowymi $w_2 - 2w_1$, $w_1 - w_2$, $-1 \cdot w_2$ do postaci schodkowej zredukowanej $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$, z której odczytujemy rozwiązanie ogólne $x_1 = -2x_2 + 7x_4, x_3 = 5x_4$. Kładąc $x_2 = 1, x_4 = 0$ otrzymujemy wektor $v_1 = (-2, 1, 0, 0)$. Następnie, kładąc $x_2 = 0, x_4 = 1$ otrzymujemy $v_2 = (7, 0, 5, 1)$. Wektory v_1, v_2 tworzą bazę W, skąd $\dim W = 2$.

b) Podstawiając wektory v_1, v_2 do równania opisującego U_s otrzymujemy $s = 3$ (tak samo w temacie B)

Zadanie 4. W $\mathbb{R}^3$ określono pewną bazę $\mathcal{A}$, natomiast w $\mathbb{R}^2$ bazę $\mathcal{C} = \{(1, -2), (0, 1)\}$ oraz pewną bazę $\mathcal{B}$, taką, że macierz zamiany współrzędnych $M(id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Przekształcenie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ zadano macierzą $M(f)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

a) Znaleźć macierz $M(f)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}}$

b) Wyznaczyć wektory, z których składa się baza $\mathcal{B}$.

odp. a) $M(f)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}} = M(id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot M(f)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ b) kolejne kolumny macierzy zamiany współrzędnych $M(id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ to współrzędne kolejnych wektorów bazy $\mathcal{B}$ w bazie $\mathcal{C}$. Zatem pierwszy wektor $\mathcal{B}$ to $3 \cdot (1, -2) + 1 \cdot (0, 1) = (3, -5)$ zaś drugi to $2 \cdot (1, -2) + 1 \cdot (0, 1) = (2, -3)$

Zadanie 5.

Niech w $\mathbb{R}^4$ zadana będzie podprzestrzeń afiniczna (hiperpłaszczyzna) $E = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 5\}$ oraz punkt $Q = (1, 0, 0, 1)$

a) Znaleźć parametryzację podprzestrzeni E oraz parametryzację prostej prostopadłej do E przechodzącej przez punkt Q

b) Obliczyć rzut prostopadły punktu Q na podprzestrzeń E

odp. a) Z rozwiązania ogólnego równanania opisującego E: $x_1 = 5 - x_2 + x_3 - 2x_4$ otrzymujemy parametryzację $x_1 = 5 - s + t - 2u$, $x_2 = s$, $x_3 = t$, $x_4 = u$, gdzie $s, t, u \in \mathbb{R}$ lub też, w postaci punktowo-wektorowej $E \ni p = (5, 0, 0, 0) + s(-1, 1, 0, 0) + t(1, 0, 1, 0) + u(-2, 0, 0, 1)$, czyli $E = (5, 0, 0, 0) + lin((-1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (-2, 0, 0, 1))$. Wektor prostopadły do E to $(1, 1, -1, 2)$ skąd szukana parametryzacja prostej to $(1, 0, 0, 1) + t(1, 1, -1, 2)$, lub z rozbiciem na pozycje: $x_1 = 1 + t, x_2 = t, x_3 = -t, x_4 = 1 + 2t)$ dla $t \in \mathbb{R}$. b) szukany rzut jest przecięciem z E prostej prostopadłej do E przechodzącej przez $(1, 0, 0, 1)$. Podstawiając parametryzację tej prostej do równania E otrzymujemy: $(1 + t) + t - (-t) + 2(1 + 2t) = 5$ czyli $7t = 2$ skąd $t = 2/7$ czyli rzut to punkt $(1, 0, 0, 1) + 2/7(1, 1, -1, 2) = (9/7, 2/7, -2/7, 11/7)$ (w temacie B rzut to punkt $(9/7, 2/7, 11/7, -2/7)$

Zadanie 6. Niech macierz $A = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 12 & -3 \end{bmatrix}$

a) Znaleźć takie macierze $D, C \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, z których D jest diagonalna zaś C jest odwracalna, że $D = C^{-1}AC$

b) Obliczyć A^{100}.

odp. traktujemy macierz A jako macierz w bazie standardowej pewnego endomorfizmu $\mathbb{R}^2$. Wielomian charakterystyczny $w_A = (7-\lambda)(-3-\lambda)+24 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$. Stąd są dwie wartości własne $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = 3$. Dla λ_1 znajdujemy przestrzeń własną złożoną z wektorów spełniających $3x_1 - x_2 = 0$ czyli $V_{(1)} = lin(1, 3))$ zaś dla λ_2 przestrzeń własna składa się z wektorów spełniających $2x_1 - x_2 = 0$ czyli $V_{(3)} = lin((1, 2))$. Zatem $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ oraz $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ (ściślej rzecz biorąc możemy tak przyjąć, D, C nie są określone jednoznacznie). b) $A^{100} = CD^{100}C^{-1} =$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{100} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

Zadanie 7.

Dane są formy kwadratowe $q_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, wzorem $q_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + tx_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3$ oraz $q_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, wzorem $q_2(x_1, x_2, x_3) = -3x_1^2 - 6x_3^2 + 4x_1x_3$.

a) Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ forma q_1 jest dodatnio określona?

b) Czy forma q_2 jest ujemnie półokreślona?

odp. macierz q_1 to $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & t & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Stosując kryterium Silvestera otrzymujemy nierówności: $W_1 = 1 > 0$, $W_2 = t - 4 > 0$, $W_3 = 2t - 12 > 0$ czyli forma jest dodatnio określona $\Leftrightarrow$ $t > 6$ (ta sama odpowiedź, gdy idzie o ujemną określoność w temacie B, z tym, że tam badaliśmy kiedy $W_1 < 0, W_2 > 0, W_3 < 0$)

b) zastosujemy kryterium wartości własnych: macierz q_2 to $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -6 \end{bmatrix}$, zaś jej wielomian charakterystyczny to $(-3-\lambda)(-\lambda)(-6-\lambda)+4\lambda = -\lambda(\lambda+4)(\lambda+5)$, którego pierwiastki to $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -4, \lambda_3 = -5$. Poniewaz wszystkie te pierwiastki są niedodatnie, zatem q_2 jest ujemnie półokreślona.(to samo w temacie B)

Zadanie 8.

Określono zadanie programowania liniowego w postaci standardowej:

$x_2 + 3x_3 - 4x_5 \to \min$, przy warunkach:

$$\begin{cases} x_1 \;\; +2x_2 \;\; \;\; +x_4 \;\; +x_5 \;\; = 3 \\ x_1 \;\; +2x_2 \;\; +x_3 \;\; \;\; +2x_5 \;\; = 8 \end{cases} \quad \text{oraz } x_i \geq 0 \text{ dla } i = 1, \ldots, 5$$

a) Które spośród zbiorów zbiorów $\mathcal{B}_1 = \{1, 2\}$, $\mathcal{B}_2 = \{3, 4\}$, $\mathcal{B}_3 = \{4, 5\}$ są bazowe? Zbadać czy odpowiadające im rozwiązania bazowe są dopuszczalne.

b) Rozwiązać podane zadanie programowania liniowego metodą sympleks.

Odp. a) Macierz układu to $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix}$. Ponieważ kolumna 1 i 2 tej macierzy są liniowo zależne, zatem $\mathcal{B}_1 = \{1, 2\}$ nie jest zbiorem bazowym. Dla $\mathcal{B}_2 = \{3, 4\}$ mamy rozwiązanie bazowe $x_1 = x_2 = x_5 = 0$, $x_3 = 8, x_4 = 3$ czyli $(0, 0, 8, 3, 0)$ dopuszczalne, zaś dla $\mathcal{B}_3 = \{4, 5\}$ rozwiązanie bazowe $x_1 = x_2 + x_3 = 0$, $x_5 = 4, x_4 = -1$ czyli $(0, 0, 0, -1, 4)$ niedopuszczalne.

b) najprościej zacząć rozwiązywanie od rozwiązania bazowego dopuszczalnego $(0,0,8,3,0)$ odpowiadającego zbiorowi bazowemu $\mathcal{B}_2 = \{3,4\}$. Macierz układu rozszerzymy o trzeci wiersz w_f odpowiadający funkcji celu: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$. Po sprowadzeniu tej macierzy do postaci sympleksowej względem 3 i 4 kolumny operacją $w_f + 3w_2$ otrzymamy: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 & 8 \\ 3 & 5 & 0 & 0 & 10 & 24 \end{bmatrix}$. Wartość funkcji celu w początkowym punkcie wynosi 24 i ponieważ istnieją współczynniki dodatnie w_f możemy poprawić (zmniejszyć) tę wartość. Kierując się tym, że największy z tych współczynników to 10 w 5 kolumnie, wybieramy x_5 jako nową zmienną bazową. Wykonujemy test ilorazów: $3/1 < 8/2$ zatem wierszem aktywnym będzie wiersz 1 i x_4 stanie się zmienną niebazową. Sprowadzamy macierz do postaci sympleksowej względem 3 i 5 kolumny operacjami: $w_2 - 2w_1$ oraz $w_f - 10w_1$. Otrzymujemy tabelę: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & -2 & 0 & 2 \\ -7 & -15 & 0 & -10 & 0 & -6 \end{bmatrix}$. Współczynniki przy zmiennych w wierszu funkcji celu są niedodatnie, tzn. mamy min$=-6$ w punkcie bazowym $(0,0,2,0,3)$. (w temacie B min$=1$ w punkcie $(0,0,2,0,3)$)