Egzamin z algebry WNE, B

3 lutego 2016

Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce. Na każdej kartce z rozwiązaniem powinno być:
- imię i nazwisko osoby zdającej oraz jej numer indeksu,
- numer grupy ćwiczeniowej do której osoba zdająca uczęszczała,
- numer rozwiązywanego zadania oraz litera – nazwa tematu.

Zadanie 1. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ pewne wektory v_1, v_2, v_2 tworzą bazę ortonormalną $\mathcal{B}$ tej przestrzeni. Niech $V = lin(v_1, v_3)$ i niech $w = v_1 + 2v_2 + 3v_3$.

a) Ile wynosi iloczyn skalarny wektorów v_3 i w ?

b) Jakie są współrzędne w bazie $\mathcal{B}$ rzutu prostopadłego wektora w na przestrzeń V?

Odpowiedzi należy uzasadnić.

Zadanie 2. W przestrzeni $\mathbb{R}^4$ zadane są wektory $v_1 = (2,1,1,1), v_2 = (-2,0,-1,-1), v_3 = (4,4,2,2), v_4 = (6,3,3,3)$ oraz wektor $w_t = (t,1,2,2)$ zależny od $t \in \mathbb{R}$. Niech $V = lin(v_1, v_2, v_3, v_4)$.

a) Znaleźć wymiar przestrzeni V oraz układ równań liniowych opisujących V.

b) dla jakich wartości t zachodzi $lin(w_t) \subset V$?

Zadanie 3. Podprzestrzeń $W \subset \mathbb{R}^4$ jest opisana układem równań:

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & -x_3 & +2x_4 & = 0 \\ 2x_1 & +4x_2 & -3x_3 & -x_4 & = 0 \end{cases}$$

.

a) Wyznaczyć pewną bazę W i określić wymiar W.

b)Niech $U_s = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : 4x_1 + 8x_2 - 5x_3 + sx_4 = 0\} \subset \mathbb{R}^4$ będzie podprzestrzenią zależną od $s \in \mathbb{R}$. Dla jakich wartości $s \in \mathbb{R}$ zachodzi $W \subset U_s$?

Zadanie 4. W $\mathbb{R}^3$ określono pewną bazę $\mathcal{A}$, natomiast w $\mathbb{R}^2$ bazę $\mathcal{C} = \{(1,-3),(0,1)\}$ oraz pewną bazę $\mathcal{B}$, taką, że macierz zamiany współrzędnych $M(id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Przekształcenie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ zadano macierzą $M(f)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

a) Znaleźć macierz $M(f)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}}$

b) Wyznaczyć wektory, z których składa się baza $\mathcal{B}$.

Zadanie 5.

Niech w $\mathbb{R}^4$ zadana będzie podprzestrzeń afiniczna (hiperpłaszczyzna) $E = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 5\}$ oraz punkt $Q = (1,0,1,0)$

a) Znaleźć parametryzację przestrzeni E oraz parametryzację prostej prostopadłej do E przechodzącej przez Q

b) Obliczyć rzut prostopadły punktu Q na przestrzeń E

Zadanie 6. Niech macierz $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -12 & 7 \end{bmatrix}$

a) Znaleźć takie macierze $D, C \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, z których D jest diagonalna zaś C jest odwracalna, że $D = C^{-1}AC$

b) Obliczyć A^{100}.

Zadanie 7.

Dane są formy kwadratowe $q_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, wzorem $q_1(x_1,x_2,x_3) = -x_1^2 - tx_2^2 - 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3$ oraz $q_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, wzorem $q_2(x_1,x_2,x_3) = -6x_1^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_3$.

a) Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ forma q_1 jest ujemnie określona?

b) Czy forma q_2 jest ujemnie półokreślona?

Zadanie 8.

Określono zadanie programowania liniowego w postaci standardowej:

$x_2 - 4x_3 + 3x_5 \to \min$, przy warunkach:

$$\begin{cases} x_1 \; +2x_2 \; +x_3 \; +x_4 \qquad = 2 \\ x_1 \; +2x_2 \; +2x_3 \qquad +x_5 = 7 \end{cases} \quad \text{oraz } x_i \geq 0 \text{ dla } i = 1,\ldots,5$$

a) Które spośród zbiorów $\mathcal{B}_1 = \{1,2\}$, $\mathcal{B}_2 = \{2,4\}$, $\mathcal{B}_3 = \{4,5\}$ są bazowe? Zbadać czy odpowiadające im rozwiązania bazowe są dopuszczalne.

b) Rozwiązać podane zadanie programowania liniowego metodą sympleks.