Egzamin z algebry WNE, A

9 lutego 2015

Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce. Na każdej kartce z rozwiązaniem powinno być:

- imię i nazwisko osoby zdającej oraz jej numer indeksu,
- numer grupy ćwiczeniowej do której osoba zdająca uczęszczała,
- numer rozwiązywanego zadania oraz litera - nazwa tematu.

Zadanie 1. a) Niech wektory v_1, v_2, v_3, v_4 tworzą bazę przestrzeni liniowej V. Czy układ złożony z wektorów v_1, v_3, v_4 jest liniowo niezależny? Czy układ złożony z wektorów $v_1 + v_2, v_3, v_4$ jest bazą przestrzeni V?

b) Niech $f : W \to W$ będzie endomorfizmem dwuwymiarowej przestrzeni wektorowej W. Niech w_1 będzie wektorem własnym f o wartości własnej 1 zaś w_2 wektorem własnym f o wartości własnej 3. Znaleźć $M(f)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$, gdzie $\mathcal{A} = \{w_1, w_2\}$. Znaleźć $M(f)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$, gdzie $\mathcal{B} = \{w_1, w_1 - w_2\}$.

Odpowiedzi uzasadnić.

Zadanie 2. W przestrzeni $\mathbb{R}^4$ zadane są wektory $v_1 = (1, -1, 0, 2), v_2 = (2, -2, 1, 4), v_3 = (1, -1, -1, 2)$. Niech $V = lin(v_1, v_2, v_3)$

a) Określić wymiar przestrzeni V i podać układ równań liniowych, którego zbiorem rozwiązań jest V

b) Uzupełnić wektor v_1 do bazy przestrzeni V, tak, aby suma współrzędnych wektora v_3 w tej bazie wynosiła 5.

Zadanie 3. Podprzestrzeń $W \subset \mathbb{R}^4$ jest opisana układem równań:

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & x_3 & +x_4 & = 0 \\ 2x_1 & +4x_2 & 3x_3 & -x_4 & = 0 \end{cases}$$

a) Znaleźć bazę przestrzeni W.

b) Niech podprzestrzeń $U \subset \mathbb{R}^4$ będzie opisana układem równań, zależnym od parametrów $s, t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & & +sx_4 & = 0 \\ 3x_1 & +6x_2 & tx_3 & -3x_4 & = 0 \end{cases}$$

Określić te wartości parametrów $s, t \in \mathbb{R}$, dla których zachodzi $U = W$

Zadanie 4. W $\mathbb{R}^2$ określono bazę $\mathcal{B} = \{(2,1),(1,0)\}$. W $\mathbb{R}^3$ zadano wektory $u_1 = (1,0,1), u_2 = (0,1,0)$. Ponadto mamy przekształcenie liniowe $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, określone wzorem $g((x_1,x_2,x_3)) = (x_1 + 2x_2 - x_3, x_1 + x_2)$.

a) Uzupełnić układ u_1, u_2 wektorem $u_3 \in \mathbb{R}^3$ do bazy $\mathcal{A}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ tak, aby trzecia kolumna macierzy $M(f)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}$ miała postać $\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$. Podać $M(f)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}$ dla znalezionej bazy $\mathcal{A}$.

.

b) Przekształcenie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadano macierzą $M(f)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Obliczyć $f((0,1))$

Zadanie 5. Niech płaszczyzna $E = \{x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4\}$ zaś $p = (0,1,0)$.

a) Znaleźć parametryzację prostej prostopadłej do E przechodzącej przez p oraz układ równań liniowych opisujących tę prostą.

b) Niech V będzie płaszczyzną równoległą do E przechodzącą przez $(0,0,0)$. Obliczyć rzut prostopadły punktu p na V.

Zadanie 6. Zadano endomorfizm $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ wzorem $\phi((x_1,x_2)) = (4x_1 + 2x_2, -x_1 + x_2))$ a) Zbadać, czy istnieje dla ϕ baza $\mathbb{R}^2$ złożona z wektorów własnych ϕ. Jeśli istnieje, to podać ją oraz macierz ϕ w tej bazie.

b) Obliczyć $\phi^{100}((1,2))$

Zadanie 7. Zadano macierz $A_t = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & t & 2 \\ 3 & 3 & t \end{bmatrix}$, zależną od parametru $t \in \mathbb{R}$. Określić, dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$ macierz ta nie jest odwracalna. b) Obliczyć A_t^{-1} dla $t = 4$

Zadanie 8. Określono zadanie programowania liniowego w postaci standardowej:

$x_3 + 2x_5 \to \min$, przy warunkach:

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & & = 1 \\ x_1 & +x_2 & +3x_3 & & +x_5 & = 7 \end{cases} \quad \text{oraz } x_i \geq 0 \text{ dla } i = 1,\ldots,5$$

a) Dla zbiorów bazowych $\mathcal{B}_1 = \{1,4\}$, $\mathcal{B}_2 = \{4,5\}$ zbadać czy odpowiadające im rozwiązania bazowe są dopuszczalne.

b) Rozwiązać podane zadanie programowania liniowego metodą sympleks.