# Egzamin z algebry WNE, B

12 marca 2013

Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce. Na każdej kartce z rozwiązaniem powinno być:
- imię i nazwisko osoby zdającej oraz jej numer indeksu,
- numer grupy ćwiczeniowej do której osoba zdająca uczęszczała,
- numer rozwiązywanego zadania oraz litera - nazwa tematu.

**Zadanie 1.** Niech $v_1 = (1, 0, -1, 1), v_2 = (1, 1, 1, 2), v_3 = (3, 2, 1, 5), v_4 = (-1, 1, 3, 0)$. Oznaczmy $V = lin(v_1, v_2, v_3, v_4)$.

a) Znaleźć bazę $V$ i układ równań liniowych opisujący $V$

b) Niech $W_t = lin((5, 2, -1, t))$. Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ zachodzi $W_t \subset V$?

**Zadanie 2.** Niech podprzestrzeń $W \subset \mathbb{R}^5$ będzie opisana układem równań liniowych jednorodnych:

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & -x_3 & -x_4 & -x_5 & = 0 \\ 2x_1 & -4x_2 & -x_3 & & -6x_5 & = 0 \\ 3x_1 & -6x_2 & -2x_3 & -x_4 & -7x_5 & = 0 \end{cases}$$

a) Znaleźć wymiar przestrzeni $W$.

b) Określić taką bazę $W$, aby wektor $(1, -1, 0, 2, 1)$ miał w niej wszystkie współrzędne równe 1.

**Zadanie 3.** W $\mathbb{R}^3$ zadana jest pewna baza $\mathcal{A}$, natomiast w $\mathbb{R}^2$ zadano bazę $\mathcal{C} = \{(1, 1), (-1, 3)\}$ oraz taką bazę $\mathcal{B}$, że $M(id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Określono również przekształcenie liniowe $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ macierzą $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

a) Znaleźć macierz $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}}$

b) Wyliczyć bazę $\mathcal{B}$.

**Zadanie 4.** Niech $v_1 = (2/3, -1/3, 0, 2/3), v_2 = (1/3, 2/3, 2/3, 0)$ zaś $w = (0, 0, 3, 6)$

a) Obliczyć rzut prostopadły $w$ na $lin(v_1, v_2)$

b) uzupełnić układ złożony z wektorów $v_1, v_2$ wektorem $v_3$ do bazy ortogonalnej przestrzeni $W = lin(v_1, v_2, w)$.

**Zadanie 5.** Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

a) Obliczyć $\det A$.

b)niech $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ oraz niech $C$ będzie macierzą $2 \times 2$ spełniającą $\det(BC^\top) = 48$. Ile wynosi $\det(C^2)$?

**Zadanie 6.** Zadano macierz $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

a) Określić taką macierz $C \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ oraz liczbę $s$ aby $C^{-1}AC = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$

b) Obliczyć $A^{200}$

**Zadanie 7.** W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ zadane sa punkty $P = (1, 1, 3)$ oraz $Q = (2, 2, 2)$.

a) Znaleźć parametryzację oraz równania opisujące prostą przechodzącą przez $P$ i $Q$.

b) Określić równanie takiej płaszczyzny $H \subset \mathbb{R}^3$, że rzutem prostopadłym $P$ na $H$ jest $Q$.

**Zadanie 8.**

Określono zadanie programowania liniowego w postaci standardowej:

$x_1 + x_2 - 2x_3 \to \min$ przy warunkach

$$\begin{cases} 2x_1 & +x_2 & +x_3 & +2x_4 & & = 3 \\ 2x_1 & & +x_3 & +3x_4 & +x_5 & = 7 \end{cases} \quad \text{oraz } x_i \geq 0 \text{ dla } i = 1, \ldots, 5$$

a) Dla zbiorów bazowych $\mathcal{B}_1 = \{2, 3\}$, $\mathcal{B}_2 = \{2, 5\}$ zbadać czy odpowiadające im rozwiązania bazowe są dopuszczalne.

b) Rozwiązać podane zadanie programowania liniowego metodą sympleks.