Egzamin z algebry WNE, A

6 lutego 2013

Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce. Na każdej kartce z rozwiązaniem powinno być:
- imię i nazwisko osoby zdającej oraz jej numer indeksu,
- numer grupy ćwiczeniowej do której osoba zdająca uczęszczała,
- numer rozwiązywanego zadania oraz litera - nazwa tematu.

Zadanie 1. Niech podprzestrzeń $W \subset \mathbb{R}^5$ będzie opisana układem równań liniowych jednorodnych:

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +2x_3 & +2x_4 & -x_5 & = 0 \\ 2x_1 & +4x_2 & +3x_3 & -x_4 & +x_5 & = 0 \end{cases}$$

a) Niech $V_t = lin((t, 1, 3, 0, 1))$ dla $t \in \mathbb{R}$. Czy istnieją takie wartości parametru $t \in \mathbb{R}$, dla których zachodzi zawieranie $V_t \subset W$? Jeśli tak, to podaj wszystkie takie t.

b)Uzupełnić wektor $(3, 0, -2, 1, 1)$ do bazy W. Podać $\dim W$.

Zadanie 2. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ zadano wektory $v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, 0, 1)$

a) Uzupełnić wektory v_1, v_2 do bazy $\mathbb{R}^3$, tak, aby wektor $(1, 0, 0)$ miał w tej bazie współrzędne $1, 2, 3$

b) Czy można uzupełnić v_1, v_2 do bazy $\mathbb{R}^3$ wektorem postaci (a, b, a), gdzie $a, b \in \mathbb{R}$? Odpowiedź uzasadnić.

Zadanie 3. W $\mathbb{R}^3$ określono bazę $\mathcal{A} = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 2)\}$, natomiast w $\mathbb{R}^2$ określono bazy $\mathcal{B} = \{(1, 1), (1, 2)\}$ oraz $\mathcal{C} = \{(2, 1), (1, 0)\}$.
Przekształcenie
$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ zdefiniowano wzorem
$f((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 - x_2)$. Podobnie określono
$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ wzorem $g((x_1, x_2)) = (x_1 + 3x_2, -2x_1)$, natomiast $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadano macierzą $M(h)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

a) Znaleźć macierz $M(f)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$

b) Niech $w \in \mathbb{R}^2$ ma w bazie $\mathcal{B}$ współrzędne $2, 3$. Obliczyć $(g+h)(w)$

Zadanie 4. Określono endomorfizm $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ wzorem $\phi((x_1, x_2, x_3)) = (4x_1 + 2x_2 + x_3, 2x_1 + 7x_2 + 2x_3, 3x_3)$.

a) Znaleźć wszystkie wartości własne endomorfizmu ϕ oraz podać bazy odpowiednich podprzestrzeni własnych.

b) Czy istnieje taka baza $\mathcal{B}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$, że $M(\phi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, gdzie$s \in \mathbb{R}$. Jeśli tak, to podać taką bazę $\mathcal{B}$. Czemu musi równać się s?

Zadanie 5. Zadano macierze: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 7 \\ 1 & 6 & 1 & 9 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 11 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

a) Obliczyć $\det A$ b) Obliczyć $\det(B^7 \cdot (B^\top)^{-6})$

Zadanie 6. Mamy podprzestrzeń liniową $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 - x_4 = 0\} \subset \mathbb{R}^4$ oraz punkty $P = (1, 1, 1, 3), Q = (3, 0, 0, 1)$ w $\mathbb{R}^4$. Niech $H = P + V \subset \mathbb{R}^4$

a) Znaleźć równanie przestrzeni afinicznej H i parametryzację H.

b) Znaleźć parametryzację prostej prostopadłej do H przechodzącej przez Q i rzut prostopadły punktu Q na H.

Zadanie 7. Niech $q, p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, będą formami kwadratowymi: $q((x_1, x_2, x_3)) = -x_1^2 - 8x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$, $p((x_1, x_2, x_3)) = x_1^2 + sx_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_3$ dla $s \in \mathbb{R}$.

a) Zbadać czy q jest dodatnio lub ujemnie określona

b) Sprawdzić dla jakich s forma p ta jest dodatnio półokreślona.

Zadanie 8.

Określono zadanie programowania liniowego w postaci standardowej:

$x_4 + 4x_5 \to \min$ przy warunkach

$$\begin{cases} 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & & -x_5 & = 4 \\ x_1 & & +4x_3 & +x_4 & +x_5 & = 9 \end{cases} \quad \text{oraz } x_i \geq 0 \text{ dla } i = 1, \ldots, 5$$

a) Dla zbiorów bazowych $\mathcal{B}_1 = \{2, 4\}, \mathcal{B}_2 = \{4, 5\}$ zbadać czy odpowiadające im rozwiązania bazowe są dopuszczalne.

b) Rozwiązać podane zadanie programowania liniowego metodą sympleks.