Egzamin z algebry WNE, B

28 lutego 2012

Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce. Na każdej kartce z rozwiązaniem powinno być:

- imię i nazwisko osoby zdającej oraz jej numer indeksu,
- numer grupy ćwiczeniowej do której osoba zdająca uczęszczała,
- numer rozwiązywanego zadania oraz litera - nazwa tematu.

Zadanie 1. Niech $V = lin((1,0,1,1),(1,1,2,1),(2,1,3,2),(1,0,2,3))$ będzie podprzestrzenią liniową $\mathbb{R}^4$. Niech $v_t = (1,1,3,t)$, wektor w $\mathbb{R}^4$ zależny od parametru $t \in \mathbb{R}$

a) Znaleźć wymiar przestrzeni V i podać układ równań, bądź równanie liniowe jednorodne opisujące V.

b) zbadać czy istnieją wartości parametru $t \in \mathbb{R}$, dla których $v_t \in V$. Jeśli tak, to podać te wartości.

Zadanie 2. Rozpatrzmy układ równań U zależny od parametru $t \in \mathbb{R}$

$$U : \begin{cases} 2x_1 & +tx_2 & +x_3 & =1 \\ x_1 & +x_2 & +tx_3 & =1 \\ 3x_1 & +x_2 & +x_3 & =1 \end{cases}$$

a) Zbadać dla jakich wartości $t \in \mathbb{R}$ układ U ma jednoznaczne rozwiązanie.

b) Dla jakich wartości $t \in \mathbb{R}$ układ U jest niesprzeczny.

Zadanie 3. Zadano macierz $A = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 8 & -5 \end{bmatrix}$

a) Uzasadnić, że A jest diagonalizowalna, oraz wskazać taką macierz $C \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, że macierz $C^{-1}AC$ jest diagonalna

b) Obliczyć A^{100}.

Zadanie 4. W $\mathbb{R}^3$ określono bazę $\mathcal{A} = \{v_1, v_2, v_3\}$ gdzie $v_1 = (1,1,1), v_2 = (0,1,0), v_3 = (1,0,2)$, natomiast w $\mathbb{R}^2$ określono bazę $\mathcal{B} = \{w_1, w_2\}$, gdzie $w_1 = (1,1), w_2 = (1,2)$ oraz pewną inną bazę $\mathcal{C} = \{u_1, u_2\}$, tak że macierz zamiany współrzędnych $M(id)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Ponadto zdefiniowano przekształcenie $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ macierzą $M(\psi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$.

a) Podać bazę $\mathcal{C}$.

b) Obliczyć macierz $M(\psi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}}$.

Zadanie 5. Mamy podprzestrzeń liniową $V \subset \mathbb{R}^4$ opisaną układem równań liniowych

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

oraz wektor $v = (1, 0, 0, 0)$

a) Znaleźć bazę ortonormalną przestrzeni V.

b) Obliczyć rzut prostopadły wektora v na $V^{\perp}$.

Zadanie 6. Zadano takie macierze A, B, że $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ zaś $B^{\top} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Znaleźć macierz kwadratową C, która spełnia równość $(B^{-1}C)^{-1} = A$.

b) Obliczyć $\det(A^{97}B^{50})$.

Zadanie 7. Niech $q_1, q_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, będą takimi formami kwadratowymi, że $q_1((x_1, x_2, x_3)) = -2x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$ zaś $q_2((x_1, x_2, x_3)) = -x_2^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3$.

a) Zbadać czy q_1 jest dodatnio lub ujemnie określona i jeśli jest to podać jak

b) Zbadać czy q_2 jest dodatnio lub ujemnie półokreślona i jeśli jest to jak.

Zadanie 8.

Określono zadanie programowania liniowego w postaci standardowej:

$x_1 + x_3 - x_5 \to \min$ przy warunkach

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 - x_4 - 2x_5 = 1 \\ 2x_1 + x_3 + x_4 + x_5 = 2 \end{cases} \quad \text{oraz } x_i \geq 0 \text{ dla } i = 1, \ldots, 5$$

a) Dla zbiorów bazowych $\mathcal{B}_1 = \{3, 4\}$, $\mathcal{B}_2 = \{2, 3\}$ zbadać czy odpowiadające im rozwiązania bazowe są dopuszczalne.

b) Rozwiązać podane zadanie programowania liniowego metodą sympleks.