Egzamin z algebry WNE, A

1 lutego 2012

Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce. Na każdej kartce z rozwiązaniem powinno być:

- imię i nazwisko osoby zdającej oraz jej numer indeksu,
- numer grupy ćwiczeniowej do której osoba zdająca uczęszczała,
- numer rozwiązywanego zadania oraz litera - nazwa tematu.

Zadanie 1. Niech $V = lin((1,2,1,1),(1,0,0,2),(1,4,2,0),(3,2,1,5))$ będzie podprzestrzenią liniową $\mathbb{R}^4$

a) Znaleźć bazę i wymiar przestrzeni V

b) podać układ równań liniowych jednorodnych opisujących V.

Zadanie 2. Niech podprzestrzeń $W \subset \mathbb{R}^5$ będzie opisana układem równań liniowych jednorodnych:

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +2x_3 & +2x_4 & -x_5 & =0 \\ 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & -x_4 & +x_5 & =0 \end{cases}$$

a) Znaleźć bazę i wymiar przestrzeni W.

b) Niech $V_s = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) : x_2 - 3x_3 + sx_4 + 3x_5 = 0\}$ dla $s \in \mathbb{R}$. Czy istnieją takie wartości parametru $s \in \mathbb{R}$, dla których zachodzi zawieranie $W \subset V_s$? Jeśli tak, to podaj wszystkie takie s.

Zadanie 3. Niech endomorfizm $\varphi_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie zadany wzorem $\varphi_t((x_1,x_2,x_3)) = (2x_1 + 2x_2 + tx_3, 2x_1 + 5x_2 + 6x_3, x_3)$.

a) Znaleźć wartości własne i bazy odpowiednich podprzestrzeni własnych endomorfizmu φ_t dla $t = 0$

b) Zbadać dla jakiej wartości $t \in \mathbb{R}$ endomorfizm φ_t ma w pewnej bazie $\mathbb{R}^3$ macierz diagonalną.

Zadanie 4. W $\mathbb{R}^3$ określono bazę $\mathcal{A} = \{v_1, v_2, v_3\}$ gdzie $v_1 = (1,0,1), v_2 = (0,1,0), v_3 = (1,0,2)$, natomiast w $\mathbb{R}^2$ określono bazę $\mathcal{B} = \{w_1, w_2\}$, gdzie $w_1 = (1,1), w_2 = (1,2)$. Przekształcenie $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ zdefiniowano macierzą

$M(\psi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. Zadano również przekształcenie $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ wzorem $\varphi((x_1, x_2)) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2)$

a) Znaleźć wzór przekształcenia ψ

b) Obliczyć macierz $M(\varphi \circ \psi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$.

Zadanie 5. Mamy podprzestrzeń liniową $V = lin((1,2,0,1),(2,3,0,2),(0,0,1,0))$ oraz punkty $P = (1,1,1,2), Q = (3,0,0,1)$ w $\mathbb{R}^4$.

a) Znaleźć równanie przestrzeni afinicznej $H = P + V \subset \mathbb{R}^4$.

b) Znaleźć parametryzację prostej prostopadłej do H przechodzącej przez Q oraz rzut prostopadły Q na H.

Zadanie 6. Zadano macierz $A_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & t \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ dla $t \in \mathbb{R}$.

a) Określić te wartości $t \in \mathbb{R}$, dla których macierz A_t jest odwracalna.

b) Dobrać tak wartość parametru t aby w macierzy A_t^{-1} element w drugiej kolumnie i pierwszym wierszu wynosił -2.

Zadanie 7. Niech $q_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, będzie formą kwadratową $x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2tx_2x_3$ określoną dla $t \in \mathbb{R}$.

a) Zbadać dla jakich wartości $t \in \mathbb{R}$ forma q_t jest dodatnio określona

b) Sprawdzić czy dla $t = 1$ forma ta jest dodatnio lub ujemnie półokreślona.

Zadanie 8.

Określono zadanie programowania liniowego w postaci standardowej:

$x_1 - x_2 - x_5 \to \min$ przy warunkach

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} x_1 & -x_2 & +2x_3 & & +2x_5 & = 5 \\ & x_2 & +2x_3 & +x_4 & +x_5 & = 2 \end{array} \right. \quad \text{oraz } x_i \geq 0 \text{ dla } i = 1, \ldots, 5$$

a) Dla zbiorów bazowych $\mathcal{B}_1 = \{1,4\}$, $\mathcal{B}_2 = \{3,4\}$ zbadać czy odpowiadające im rozwiązania bazowe są dopuszczalne.

b) Rozwiązać podane zadanie programowania liniowego metodą sympleks.