Egzamin z algebry WNE, 2 temat A

26 lutego 2011

Zadanie 1. Niech $v_1 = (8, 5), v_2 = (5, -3)$ będą wektorami $\mathbb{R}^2$.

a) Znaleźć taką bazę $\mathcal{B} = \{w_1, w_2\}$ przestrzeni $\mathbb{R}^2$, gdzie $w_1 = (x_1, x_2), w_2 = (y_1, y_2)$, aby v_1 miał w bazie $\mathcal{B}$ współrzędne $1, 2$ natomiast v_2 miał w $\mathcal{B}$ współrzędne $-2, 3$.

b) Czy można tak dobrać bazę w $\mathbb{R}^2$ aby v_1 miał w niej współrzędne $1, 1$ natomiast v_2 współrzędne $3, 3$. Odpowiedź uzasadnić.

Zadanie 2. Niech $V = lin((1, 2, 1, 1), (-1, 0, 2, 1), (4, 6, 1, 2), (1, 4, 4, 3)) \subset \mathbb{R}^2$ oraz niech $w_r = (3, 8, r, 5) \in \mathbb{R}^2$.

a) Znaleźć bazę V i określić $dimV$.

b) Zbadać dla jakich wartości $r \in \mathbb{R}$ zachodzi $lin(w_r) \subset V$.

Zadanie 3. Niech przestrzeń $W \subset \mathbb{R}^4$ będzie opisana układem równań liniowych jednorodnych

$$U : \left\{ \begin{array}{lllll} x_1 & +2x_2 & -x_3 & +x_4 & = 0 \\ 3x_1 & & +x_3 & +x_4 & = 0 \\ 5x_1 & +4x_2 & -x_3 & +3x_4 & = 0 \end{array} \right.$$

a) Znaleźć bazę i wymiar W

b) Uzupełnić układ U dołączając do niego pewne równania liniowe jednorodne, tak aby powstały układ U' opisywał $lin((1, 1, 0, -3))$. Uzasadnić poprawność rozwiązania.

Zadanie 4. W $\mathbb{R}^2$ zadana jest baza $\mathcal{A} = \{(1, 2), (2, 3)\}$, zaś w $\mathcal{R}^3$ baza $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (1, 1, 1), (2, 1, 1)\}$. Przekształcenia liniowe $\phi, \psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ są określone przez macierze :$M(\phi)_{\mathcal{A}}^{st} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $M(\psi)_{st}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, gdzie symbol st w przypadku pierwszej macierzy oznacza bazę standardową w $\mathbb{R}^3$, natomiast w przypadku drugiej macierzy bazę standardową w $\mathbb{R}^2$

a) Znaleźć wzory na przekształcenia ϕ, ψ oraz $\phi + \psi$

b) Obliczyć $\phi(v)$, gdzie v jest wektorem, który w bazie $\mathcal{A}$ ma współrzędne $3, 5$.

Zadanie 5. Niech $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 10 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 4 & 4 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 10 & 11 \\ 0 & 0 & 1/2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

oraz niech $A_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ dla $t \in \mathbb{R}$

a) Obliczyć $\det A$ oraz $\det(B^2(B^\top)^4)$

b) Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ istnieje taka macierz $X \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$, że
$A_t \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Zadanie 6. Niech $\psi_s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie endomorfizmem zadanym wzorem: $\psi_s((x_1, x_2, x_3)) = (2x_1 + x_2 + 2x_3, 2x_1 + 3x_2 + sx_3, x_3)$

a) Dla $s = 0$ wyznaczyć wartości własne ψ_s oraz podać bazy odpowiadających im podprzestrzeni własnych

b) Określić dla jakich wartości $s \in \mathbb{R}$ istnieje baza $\mathbb{R}^3$ złożona z wektorów własnych ψ_s

Zadanie 7. Niech płaszczyzna $H \subset \mathbb{R}^3$ będzie opisana równaniem
$x_1 + 3x_2 - x_3 = 0$, zaś $p = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$

a) Znaleźć parametryzację H oraz parametryzację prostej prostopadłej do H przechodzącej przez punkt p.

b) Znaleźć rzut prostopadły p na H.

Zadanie 8. a) Znaleźć postać standardową zadania programowania liniowego : $2x_3 - x_4 \to \max$,

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & -x_4 & = 5 \\ 2x_1 & -x_2 & & & \leq 6 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

b) Rozwiązać metodą sympleks następujące zadanie programowania liniowego: $4x_1 + 2x_2 - 3x_5 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 & +x_2 & & & +x_5 & = 3 \\ 3x_1 & & +x_3 & -2x_4 & +x_5 & = 4 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$