Egzamin z algebry WNE, A

7 lutego2019

Rozwiązania

Zadanie 1.

a) Wektory w_1, w_2, w_3 rozpinają przestrzeń W przy czym $dim W = 3$. Czy układ wektorów $w_1 + w_2$, $w_2 + w_3$, w_3 jest bazą W?

b) W przestrzeni $\mathbb{R}^4$ zadane są wektory $v_1 = (1, 1, 4, -2)$, $v_2 = (1, 2, 5, -3)$, $v_3 = (2, 3, 9, -5)$,$v_4 = (2, 2, 8, -4)$. Niech $V = lin(v_1, v_2, v_3, v_4)$.

Podać wymiar V oraz równanie lub układ równań liniowych opisujących V.

a) Zauważmy, że $(w_2 + w_3) - w_3 = w_2$ oraz $(w_1 + w_2) - w_2 = w_1$. Ale to oznacza, że $lin((w_1 + w_2), (w_2 + w_3), w_3) \supset lin(w_1, w_2, w_3) = W$. Zatem układ $w_1 + w_2$, $w_2 + w_3$, w_3 jest trójelementowym układem rozpinającym W. Ponieważ $dim W = 3$ układ ten musi być bazą W.

b) Ustawmy wektory v_1, v_2, v_3, v_4 jako wiersze macierzy $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & 5 & -3 \\ 2 & 3 & 9 & -5 \\ 2 & 2 & 8 & -4 \end{bmatrix}$.
Operacjami wierszowymi: $w_2 - w_1, w_3 - 2w_1, w_4 - 2w_1$ a następnie $w_3 - w_2$ i $w_1 - w_2$ można ją sprowadzić do postaci schodkowej zredukowanej: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Ponieważ wierszowe operacje elementarne nie zmieniają przestrzeni rozpiętej na wierszach, mamy $V = lin((1, 0, 3, -1), (0, 1, 1, -1))$. Stąd $\dim V = 2$ oraz $V \ni (x_1, x_2, x_3, x_4) = s(1, 0, 3, -1) + t(0, 1, 1, -1)$ dla $s, t \in \mathbb{R}$. Czyli wektory z V mają postać $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (s, t, 3s+t, -s-t)$. Stąd wnioskujemy, że wektory V to dokładnie te, które spełniają $x_3 = 3x_1 + x_2, x_4 = -x_1 - x_2$. Zatem mamy układ równań $3x_1 + x_2 - x_3 = 0$, $x_1 + x_2 + x_4 = 0$ opisujący V.

Zadanie 2.

a) Czy istnieje macierz $B \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$, która ma wartości własne 2, 5, 8 i nie jest diagonalizowalna?

b) Niech $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$

Podać macierze: D diagonalną oraz C odwracalną takie, że $D = C^{-1}AC$

a) Nie może być takiej macierzy. Na wykładzie zostało podane twierdzenie, orzekające, że jeśli macierz stopnia n (tzn. $n \times n$) ma n różnych pierwiastków wielomianu charakterystycznego (wartości własnych) to macierz jest diagonalizowalna.

b) traktujemy A jako macierz endomorfizmu $\mathbb{R}^2$ w bazie standardowej. Wyznaczamy wielomian charakterystyczny $\det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 6 \\ -1 & 8-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 11\lambda + 30 = (\lambda-5)(\lambda-6)$. Stąd endomorfizm ma dwie wartości własne $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 6$. Przestrzeń własna $V_{(5)}$ jest opisana układem równań liniowych jednorodnych, którego macierzą współczynników jest $\begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$. Rozwiązaniem ogólnym tego układu jest $x_1 = 3x_2$ czyli jako jej bazę można wziąć układ złożony z wektora $(3, 1)$. Podobnie za bazę $V_{(6)}$ można wziąć wektor $(2, 1)$. Ustawiając te wektory jako kolumny otrzymujemy macierz $C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ i uwzględniając odpowiadające im wartości własne macierz diagonalną $D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$.

Zadanie 3.

W $\mathbb{R}^3$ zadana jest baza $\mathcal{A}$, a w $\mathbb{R}^2$ zadane są bazy $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ przy czym $M(id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Przekształcenie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ zdefiniowano macierzą $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Czy istnieje taka baza $\mathcal{D}$ przestrzeni $\mathbb{R}^2$, że $M(\varphi)_{st}^{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

b) Znaleźć macierze $M(id)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ oraz $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}}$.

a) Nie. Jeśliby φ miało w jakiejś bazie macierz z samych zer, znaczyłoby to, że jest przekształceniem zerowym, tzn. przyporządkowującym każdemu wektorowi wektor zerowy przeciwdziedziny. Lecz wtedy φ miałoby macierz zerową w dowolnych bazach.

b) Z twierdzeń podanych na wykładzie mamy $M(id)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = (M(id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ oraz $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}} = M(id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 19 & 3 \\ 5 & 13 & 2 \end{bmatrix}$

Zadanie 4.

a) Czy dla każdych macierzy odwracalnych $B, C \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ macierz BC jest odwracalna?

b) Zadano macierz $A_t = \begin{bmatrix} 1 & t & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 4 \end{bmatrix}$, zależną od parametru $t \in \mathbb{R}$.

Określić, dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$ macierz ta nie jest odwracalna.

a) Przypomnijmy, że macierz M jest odwracalna $\Leftrightarrow \det M \neq 0$. Zatem, korzystając z twierdzenia Cauchy'ego $\det(AB) = \det A \det B \neq 0$. Czyli AB jest tez odwracalna.

b) $\det A_t = 8 + 28 - 24 - 4t = 12 - 4t = 0 \Leftrightarrow t = 3$. Macierz nie jest odwracalna tylko dla $t = 3$.

Zadanie 5. Dany jest endomorfizm $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, zależny od parametru t wzorem $\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (4x_1 + x_2 + 2x_3, 6x_1 + 3x_2 + tx_3, 6x_3)$.

a) Znaleźć wartości własne φ oraz bazy odpowiednich podprzestrzeni własnych dla $t = 0$.

b) Określić zbiór tych wartości $t \in \mathbb{R}$, dla których istnieje baza $\mathbb{R}^3$ złożona z wektorów własnych endomorfizmu φ.

a,b) Macierz edomorfizmu w bazie standardowej jest $M = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 6 & 3 & t \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$. Obliczamy wielomian charakterystyczny $\det(M-\lambda I) = (\lambda^2 - 7\lambda + 6)(6-\lambda) = (6-\lambda)^2(\lambda - 1)$. Mamy dwie wartości własne $\lambda_1 = 6$ (podwójna) i $\lambda_2 = 1$. Niezależnie od t $\dim V_{(1)} = 1$ natomiast $\dim V_{(6)}$ zależy od rzędu macierzy $M - 6I = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 6 & -3 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Rząd ten wynosi 1 dla $t = -6$ oraz 2 dla $t \neq -6$. W pierwszym przypadku $\dim V_6 = 3 - 1 = 2$ oraz $\dim V_6 = 3 - 2 = 1$ w drugim przypadku. Tylko w pierwszym przypadku, czyli dla $t = -6$ suma wymiarów przestrzeni własnych wynosi 3 $=\dim\mathbb{R}^3$. Tylko wtedy mamy bazę $\mathbb{R}^3$ złożoną z wektorów własnych φ. Dla $t = 0$ $V_{(1)}$ opisana jest układem równań liniowych jednorodnych o macierzy współczynników $M - I = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$. Rozwiązanie ogólne tego układu to $x_2 = -3x_1, x_3 = 0$, stąd jako bazę można wziąć wektor $(1, -3, 0)$. Podobnie, rozpatrując $M - 6I$ otrzymujemy $x_2 = 2x_1, x_3 = 0$. Czyli za bazę V_6 mozna wziąć wektor $(1, 2, 0)$.

Zadanie 6. Dane są macierze:$B_t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & t & 4 \\ 4 & 6 & 5 & 10 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 5 & 8 \\ 0 & 5 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

a) Dla jakiego $t \in \mathbb{R}$ zachodzi $\det B_t = -12$.

b) Obliczyć $\det(C^{-5}(C^\top)^9)$

Po poddaniu macierzy B_t operacjom wierszowym $w_3 - 3w_1, w_4 - 2w_1 - w_2$ (operacje te nie zmieniaja wyznacznika) mamy $detB_t = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & t-3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} =$ $-2 \cdot 2(t-3)$ (korzystamy z tego, że macierz dzieli się na 4 bloki, z których lewy dolny to macierz zerowa). Otrzymujemy $-4(t-3) = -12$. Stąd $t = 6$.

b) Macierz C jest trójkątna, zatem $detC = 1 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1 = 10$ (iloczyn wyrazów na przekątnej). Zatem $\det(C^{-5}(C^\top)^9) = \det C^{9-5} = 10^4 = 10000$ (skorzystalismy ze wzorów: $\det(AB) = \det A \det B$, $\det(A^n) = (\det A)^n$, $\det(A^\top) = \det A$)

Zadanie 7. W $\mathbb{R}^3$ zadano płaszczyznę H opisaną równaniem $2x_1 + x_2 - x_3 = 0$ oraz punkty $P = (1,0,0)$ i $Q = (0,1,0)$. Niech M oznacza płaszczyznę równoległą do H, przechodzącą przez P.

a) Znaleźć równanie opisujące płaszczyznę M oraz jej parametryzację.

b) Podać parametryzację prostej L prostopadłej do M i przechodzącej przez Q. Obliczyć rzut prostopadły Q na M.

a) Za równanie opisujące M można wziąć równanie $2x_1 + x_2 - x_3 = 2$ o tych samych współczynnikach co równanie opisujące H przyjmując wyraz stały taki by punkt P spełniał to równanie. Po przekształceniu tego równania do jego rozwiązania ogólnego np. $x_2 = 2 - 2x_1 + x_3$ możemy podać parametryzację, zastępując zmienne wolne parametrami: $x_1 = s, x_2 = 2 - 2s + t, x_3 = t$, gdzie $s, t \in \mathbb{R}$. Można też tę parametryzację podać w postaci wektorowo - punktowej:$M \ni p = (0,2,0) + s(1,-2,0) + t(0,1,1)$ gdzie $s, t \in \mathbb{R}$. Prosta ponieważ $H^\perp = lin((2,1,-1)$ zatem $L = (0,1,0) + lin((2,1,-1))$, skąd mamy parametryzację $L \ni p = (0,1,0) + t(2,1,-1)$, lub też z rozpisaniem na pozycje: $x_1 = 2t, x_2 = 1+t, x_3 = -t$, gdzie $t \in \mathbb{R}$. Rzut Q na M najłatwiej wyznaczyć jako punkt przecięcia L z M. W tym celu podstawmy parametryzację L do rownania M: $2(2t)+(1+t)-(-t) = 2$ czyli $t = 1/6$, zatem szukany rzut to $(0,1,0) + 1/6(2,1,-1) = (1/3, 7/6, -1/6)$

Zadanie 8.

Określono zadanie programowania liniowego: $3x_3 + 3x_4 + 2x_5 \to \min$ przy warunkach $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 = 10 \end{cases}$ oraz $x_i \geq 0$ dla

$i = 1, \ldots, 5$

a) Okreslić czy zbiory $\mathcal{B}_1 = \{1, 2\}$, $\mathcal{B}_2 = \{3, 4\}$, $\mathcal{B}_3 = \{2, 5\}$ są bazowe. Dla tych z nich, które są bazowe zbadać czy odpowiadające im rozwiązania bazowe są dopuszczalne.

b) Rozwiązać podane zadanie programowania liniowego metodą sympleks.

a) Macierzą współczynników układu jest $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$. Zbiór $\mathcal{B}_2 = \{3, 4\}$ nie jest bazowy, gdyż kolumny 3 i 4 nie są liniowo niezależne (a nawet takie same). Ponieważ kolumny 1 i 2 sąliniowo niezależne więc $\mathcal{B}_1 = \{1, 2\}$ jest bazowy. Rozwiązanie bazowe otrzymamy przyjmując zmienne niebazowe $x_3 = x_4 = x_5 = 0$. Stąd $2x_1 = 10, x_1 + x_2 = 4$ czyli $x_1 = 5, x_2 = -1$. Jest to więc rozwiązanie niedopuszczalne, bo pojawiły sie ujemne wartości zmiennych. Dla zbioru bazowego $\mathcal{B}_3 = \{2, 5\}$ mamy $x_2 = 4, x_5 = 10, x_1 = x_3 = x_4 = 0$ czyli rozwiązanie bazowe to $(0, 4, 0, 0, 0, 10)$.

b) Możemy zacząć rozwiązywanie metodą sympleks od bazowego dopuszczalnego rozwiązania $(0, 4, 0, 0, 0, 10)$ odpowiadajacego $\mathcal{B}_3 = \{2, 5\}$. Zapiszmy funkcję celu przy pomocy zmiennych niebazowych traktowanych jako zmienne wolne w rozwiązaniu ogólnym: $x_2 = 4 - x_1 - 2x_3 - 2x_4, x_5 = 10 - 2x_1 - 3x_3 - 3x_4$. Czyli funkcja celu zapisze się $f = 3x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 3x_3 + 3x_4 + 2(10 - 2x_1 - 3x_3 - 3x_4) = 20 - 4x_1 - 3x_3 - 3x_4$. Z tego zapisu widać, że funkcja celu ma wartość 20 w początkowym punkcie bazowym dopuszczalnym. Widać również, że możemy obniżyć tę wartość wprowadzając nową zmienną bazową. Kierując się tym, że współczynnik przy x_1 w zapisie funkcji celu jest najniższy i ujemny przyjmujemy x_1 jako nową zmienną bazową. Musimy również zdecydować, która z dotychczasowych zmiennych bazowych stanie się niebazowa. Jedyny możliwy wybór dający nowe rozwiązanie bazowe dopuszczalne to x_2. Zatem nowy zbiór bazowy to $\{1, 5\}$. Wyznaczamy z pierwszego równania w rozwiązaniu ogólnym $x_1 = 4 - x_2 - 2x_3 - 2x_4$, wstawiam w zapisie funkcji celu $f = 20 - 4(4 - x_2 - 2x_3 - 2x_4) - 3x_3 - 3x_4 = 4 + 4x_2 + 5x_3 + 5x_4$. Stąd widać, że w nowym rozwiązaniu bazowym $f = 4$ i nie można już zmniejszyć tej wartości, bo wszystkie współczynniki są ≥ 0. Obliczamy to rozwiązanie bazowe: $x_5 = 10 - 2(4 - x_2 - 2x_3 - 2x_4) - 3x_3 - 3x_4 = 2 + 2x_2 + x_3 + x_4$. Czyli szukane rozwiązanie bazowe to $(4, 0, 0, 0, 2)$.