Wybrane zagadnienia teorii continuów

Mirosława Reńska, Mirosław Sobolewski

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW

Prezentacja wykładu
Warszawa, maj 2011,
(prezentacja dostępna na stronie
http://www.mimuw.edu.pl/ $\sim$msobol/)

Wymagania

Wymagania

Znajomość materiału z kursowego wykładu Topologia I.

Wymagania

Znajomość materiału z kursowego wykładu Topologia I.

Zasady oceniania

Wymagania

Znajomość materiału z kursowego wykładu Topologia I.

Zasady oceniania

Ocena z przedmiotu będzie zależna od sumy punktów z egzaminu ustnego i z zadań domowych (z ćwiczeń).

Uwaga:

Będziemy zajmować się tylko przestrzeniami metrycznymi.

Uwaga:

Będziemy zajmować się tylko przestrzeniami metrycznymi.

Definicja

Continuum to niepusta przestrzeń spójna i zwarta.

Uwaga:

Będziemy zajmować się tylko przestrzeniami metrycznymi.

Definicja

Continuum to niepusta przestrzeń spójna i zwarta.

Definicja

Teoria continuów = dział topologii zajmujący się continuami.

Uwaga:

Będziemy zajmować się tylko przestrzeniami metrycznymi.

Definicja

Continuum to niepusta przestrzeń spójna i zwarta.

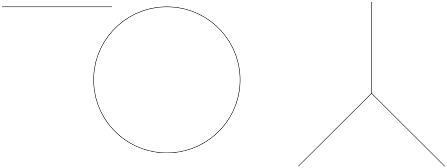
Definicja

Teoria continuów = dział topologii zajmujący się continuami.

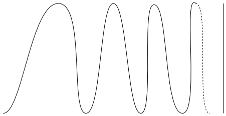
Przykład

Najprostsze continua - jednowymiarowe czyli krzywe

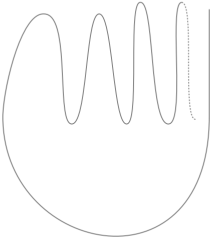
Przykłady prostych continuów



Bardziej skomplikowane przykłady

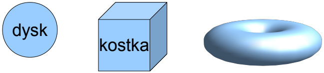


Sinusoida zagęszczona



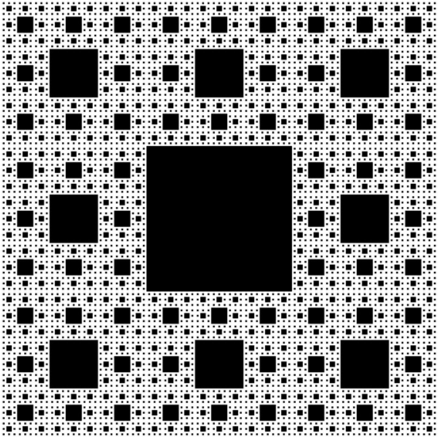
Okrąg warszawski

Przykłady 2 i 3 wymiarowe

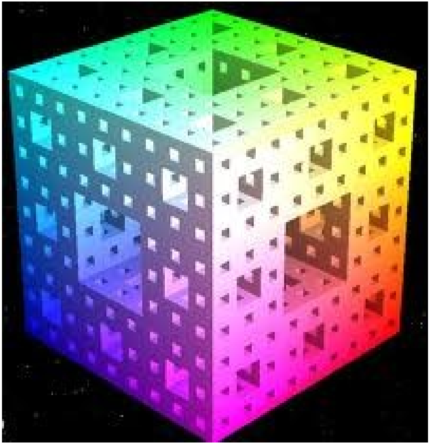


torus

Dywan Sierpińskiego

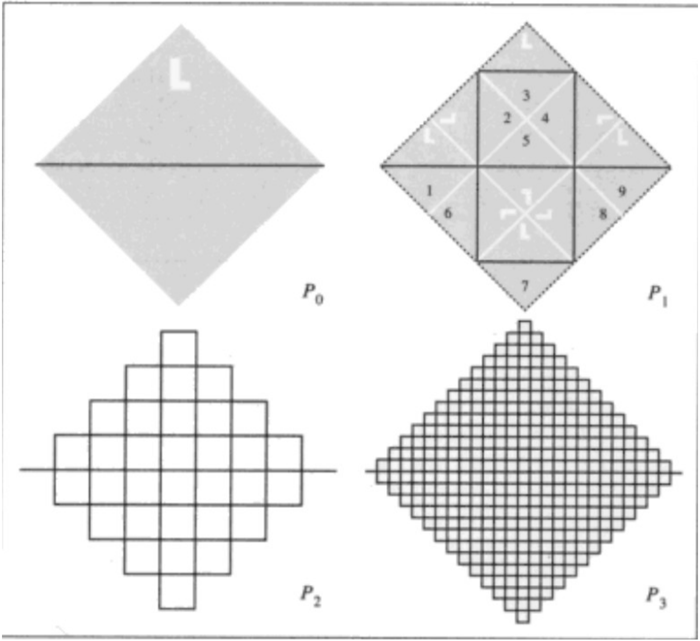


Kostka Mengera



Początki teorii continuów

Próby zdefiniowania krzywej w XIX: krzywa - obraz odcinka $[0,1]$ przy przekształceniu ciągłym.
1890- Giuseppe Peano konstruuje przekształcenie ciągłe przedziału $[0,1]$ na kwadrat $[0,1] \times [0,1]$.



3
2
4
5
1
6
9
8
7
P_0
P_1
P_2
P_3

Definicja

Continuum peanowskie - obraz przy przekształceniu ciągłym odcinka $[0, 1]$.

Definicja

Continuum peanowskie - obraz przy przekształceniu ciągłym odcinka $[0, 1]$.

Definicja

Continuum jest lokalnie spójne, jeśli ma bazę złożoną ze zbiorów otwartych spójnych.

Definicja

Continuum peanowskie - obraz przy przekształceniu ciągłym odcinka $[0, 1]$.

Definicja

Continuum jest lokalnie spójne, jeśli ma bazę złożoną ze zbiorów otwartych spójnych.

Twierdzenie (Hahn-Mazurkiewicz)

Powyższe pojęcia są sobie równoważne.

Definicja

Continuum peanowskie - obraz przy przekształceniu ciągłym odcinka $[0, 1]$.

Definicja

Continuum jest lokalnie spójne, jeśli ma bazę złożoną ze zbiorów otwartych spójnych.

Twierdzenie (Hahn-Mazurkiewicz)

Powyższe pojęcia są sobie równoważne.

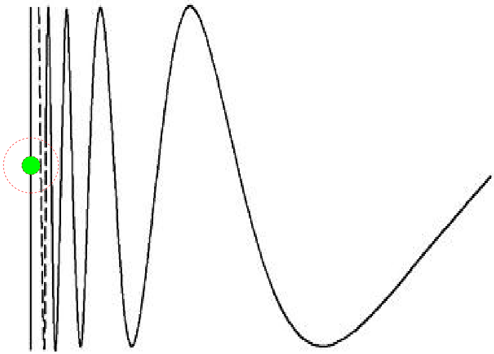
Twierdzenie (Mazurkiewicz-Moore)

Każde continuum lokalnie spójne jest łukowo spójne, tzn. każde jego dwa punkty można połączyć continuum homeomorficznym z odcinkiem (czyli łukiem).

Przykład (przykłady continuów lokalnie spójnych)

odcinek (ma bazę złożoną z przedziałów), grafy spójne (spójne wielościany 1-wymiarowe), dywan Sierpińskiego, kostka Mengera

Sinusoida zagęszczona - nie jest lokalnie spójna



Własność punktu stałego continuów

Definicja

Przestrzeń X ma własność punktu stałego jeśli dla każdego przekształcenia ciągłego $f : X \to X$ istnieje punkt stały, tzn. taki punkt $x \in X$, że $f(x) = x$.

Własność punktu stałego continuów

Definicja

Przestrzeń X *ma własność punktu stałego jeśli dla każdego przekształcenia ciągłego* $f : X \to X$ *istnieje punkt stały, tzn. taki punkt* $x \in X$*, że* $f(x) = x$.

Twierdzenie (Brouwer)

Kostka I^n *ma własność punktu stałego.*

Własność punktu stałego continuów

Definicja

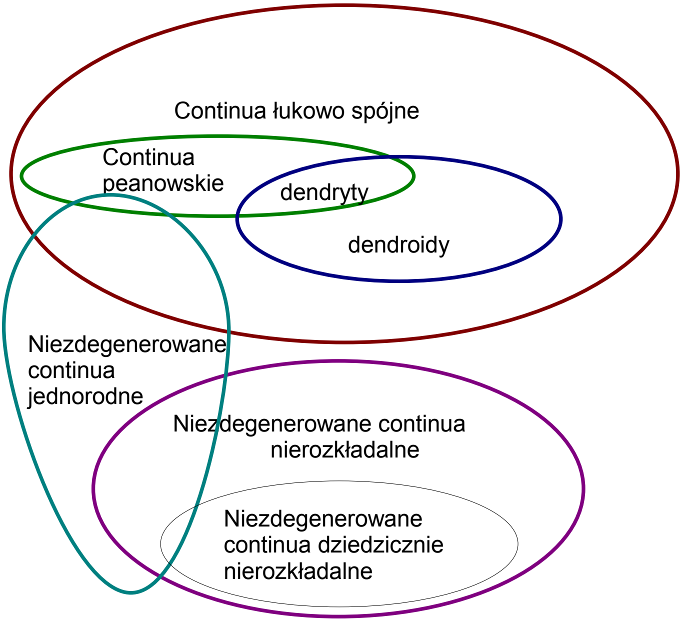
Przestrzeń X ma własność punktu stałego jeśli dla każdego przekształcenia ciągłego $f : X \to X$ istnieje punkt stały, tzn. taki punkt $x \in X$, że $f(x) = x$.

Twierdzenie (Brouwer)

Kostka I^n ma własność punktu stałego.

Twierdzenie

Kostka Hilberta I^∞ ma własność punktu stałego.


Continua łukowo spójne
Continua peanowskie
dendryty
dendroidy
Niezdegenerowane continua jednorodne
Niezdegenerowane continua nierozkładalne
Niezdegenerowane continua dziedzicznie nierozkładalne

Hiperprzestrzeń $C(X)$ continuum X

Hiperprzestrzeń $C(X)$ continuum X

Definicja

Niech X będzie przestrzenią metryczną, wtedy $C(X)$ oznacza zbiór wszystkich continuów zawartych w X z metryką Hausdorffa $dist$.

Hiperprzestrzeń $C(X)$ continuum X

Definicja

Niech X będzie przestrzenią metryczną, wtedy $C(X)$ oznacza zbiór wszystkich continuów zawartych w X z metryką Hausdorffa dist.

Definicja

$$dist(A, B) = \max(\sup\{\rho(x, B) : x \in A\}, \sup\{\rho(y, A) : y \in B\}$$

Hiperprzestrzeń $C(X)$ continuum X

Definicja

Niech X będzie przestrzenią metryczną, wtedy $C(X)$ oznacza zbiór wszystkich continuów zawartych w X z metryką Hausdorffa dist.

Definicja

$$dist(A, B) = \max(\sup\{\rho(x, B) : x \in A\}, \sup\{\rho(y, A) : y \in B\}$$

Twierdzenie

Jeśli X jest continuum to $C(X)$ jest również continuum.

Granice odwrotne

Metoda granic odwrotnych służy do konstrukcji interesujących przykładów continuów, np. continuum nie zawierającego żadnego łuku.