Kolokwium z matematyki

20 kwietnia 2012

kod 110101.

1. Zadano funkcję $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ wzorem $f(x,y) = x^3y^2 + x\ln(3x - y + 1) + x - 2y$.

a)Znaleźć kierunek najszybszego wzrostu f w punkcie $P = (1,3)$ oraz wyznaczyć tempo tego wzrostu w P.

b) Znaleźć równanie płaszczyzny stycznej do wykresu f w punkcie $(1,3,4)$

Rozwiązanie: a) kierunek najszybszego wzrostu to gradient, zaś tempo tego wzrostu to długość gradientu. Mamy: $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2 + \ln(3x - y + 1) + 3x/(3x - y + 1) + 1$ oraz $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y - x/(3x - y + 1) - 2$, skąd gradient $\nabla f(1,3) = (\frac{\partial f}{\partial x}(1,3), \frac{\partial f}{\partial y}(1,3)) = (31,3)$ zaś tempo to $\sqrt{31^2 + 3^2} = \sqrt{970}$.

b) Wzór na równanie płaszczyzny stycznej do wykresu f w punkcie (x_0, y_0, z_0), gdzie $z_0 = f(P) = f(x_0, y_0)$ jest

$z = z_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(P)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P)(y - y_0)$. Podstawiając obliczone wartości w a) mamy: $z = 4 + 31(x - 1) + 3(y - 3)$. Po uproszczeniu mamy równanie $z = -26 + 31x + 3y$.

2. Na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ określono $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ wzorem $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 + 3x^2y - 3x$. Proszę znaleźć punkty krytyczne f (tzn. te punkty $\mathbb{R}^3$, w których zeruje się gradient f), obliczyć macierz drugich pochodnych

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}.$$

Określić które z punktów krytycznych funkcji f są punktami ekstremum lokalnego i jakiego typu.

Rozwiązanie: W punktach krytycznych obie pochodne cząstkowe f przyjmują wartość 0. Mamy: $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 + 6xy - 3$ oraz $\frac{\partial f}{\partial y} = 6xy + 3x^2$. Przyrównując obie pochodne cząstkowe do 0 otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 + 6xy - 3 & = 0 \\ 6xy + 3x^2 & = 0 \end{cases}$$

Zapisując drugie równanie w postaci $3x(2y+x)=0$ otrzymujemy 2 możliwości, I: $x=0$ i II: $x=-2y$. Podstawiając I do pierwszego równania mamy $3y^2-3=0$ czyli $y=1$ lub $y=-1$, skąd mamy parę punktów krytycznych $P_1=(0,1)$ oraz $P_2=(0,-1)$. Podstawiając II do pierwszego równania mamy $12y^2+3y^2-12y^2-3=0$ co da parę punktów krytycznych $P_3=(-2,1)$ i $P_4=(2,-1)$. Różniczkując pochodne cząstkowe pierwszego rzędu otrzymujemy pochodne cząstkowe 2 rzędu: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x+6y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=6x+6y$. Zatem macierz drugich pochodnych ma postać $\begin{bmatrix} 6x+6y & 6x+6y \\ 6x+6y & 6x \end{bmatrix}$. Jeśli oznaczymy elementy macierzy drugich pochodnych $\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$, to możemy rozstrzygnąć jakiego typu jest dany punkt krytyczny, o ile liczba (wyznacznik macierzy) $AD-BC\neq 0$. Dla punktu P_1 mamy $AD-BC=6\times 0-6\times 6=-36<0$, czyli w P_1 nie ma ekstremum. Podobnie w P_2 nie ma ekstremum. Natomiast w P_3 zachodzi $A=-6<0$, $AD-BC=-6\times(-12)-(-6)\times(-6)=36>0$, zatem w P_3 jest maksimum lokalne $=f(P_3)=4$. W P_4 mamy zaś $A=6>0$ i $AD-BC=36>0$, czyli jest tu minimum lokalne $=f(P_4)=-4$.

3. Zadany jest układ równań:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3-x_4+x_5=6 \\ 2x_1+2x_2+x_3+x_4+x_5=t \\ 4x_1+4x_2+3x_3-x_4+3x_5=1 \end{cases}$$

gdzie parametr $t\in\mathbb{R}$.

a) Proszę zbadać metodą macierzową dla jakich wartości $t\in\mathbb{R}$ układ ten jest niesprzeczny

b) Proszę znaleźć zbiór rozwiązań tego układu metodą macierzową, dla tych wartości t, dla których układ jest niesprzeczny. Odp. Tworzymy macierz układu $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & t \\ 4 & 4 & 3 & -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$. Przekształceniami wierszowymi w_2-2w_1, w_3-4w_1 oraz w_3-w_2 sprowadzamy tę macierz do postaci schodkowej $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & t-12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -11-t \end{bmatrix}$, z której odczytujemy, że układ jest niesprzeczny jedynie dla $-11-t=0$ czyli $t=-11$. Przyjmując tę wartość t sprowadzamy macierz przekształceniami $(-1)w_2, w_1-w_2$ do postaci schodkowej zredukowanej $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, z której odczytujemy rozwiązanie ogólne $x_1 = -17 - x_2 - 2x_4, x_3 = 23 + 3x_4 - x_5$, w którym zmienne x_2, x_4, x_5 pełnią rolę parametrów. Zbiór rozwiązań to $\{(-17 - x_2 - 2x_4, x_2, 23 + 3x_4 - x_5, x_4, x_5) : x_2, x_4, x_5 \in \mathbb{R}\}$.

4. Zadana jest macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 4 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Wybrać spośród kolumn macierzy A bazę przestrzeni $R(A)$ rozpiętej na kolumnach A i przedstawić pozostałe kolumny jako kombinacje liniowe wybranych bazowych. Jaki jest rząd macierzy A?

b) Znaleźć bazę przestrzeni $N(A) \subset \mathbb{R}^5$ opisanej równaniem $A[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^\top = [0, 0, 0]^\top$. Sprowadzamy macierz współczynników A do postaci schodkowej zredukowanej ciągiem przekształceń wierszowych: $w_2 - 2w_1, w_3 - 4w_1, w_3 - w_2$ oraz $w_1 - w_2$ otrzymując $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Stąd możemy w macierzy A przyjąć kolumny K_1, K_3 jako bazowe (przez K_i oznaczyliśmy kolejną kolumnę o numerze i macierzy A). Przy tym pozostałe kolumny można zapisać $K_2 = K_1, K_4 = K_1 - K_3$ oraz $K_5 = (-2)K_1 + 3K_3$. Rząd macierzy A to $\dim R(A) = \text{rank} A = 2$. Wymiar przestrzeni zerowej $N(A)$ to zatem $5 - rank(A) = 3$. Pewną bazę $N(A)$ wyznaczymy z rozwiązania ogólnego $x_1 = -x_2 - x_4 + 2x_5, x_3 = x_4 - 3x_5$. Baza ta składa się z trzech wektorów $\{v_1, v_2, v_3\}$. Przyjmując $x_2 = 1, x_4 = x_5 = 0$ dostajemy $v_1 = [-1, 1, 0, 0, 0]^\top$. Przyjmując $x_2 = x_5 = 0, x_4 = 1$ mamy $v_2 = [-1, 0, 1, 1, 0]^\top$. Kładąc $x_2 = x_4 = 0, x_5 = 1$ otrzymujemy $v_3 = [2, 0, -3, 0, 1]^\top$.

Kilka ćwiczeń na działania na macierzach. Obliczyć: a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}^\top$, d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^\top$

e) $2I_3+\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^\top$. Odpowiedzi: a)$[26]$, b)$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 4 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 4 & 10 \\ 3 & 6 & 9 & 6 & 15 \end{bmatrix}$,
c)$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$, d)$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 8 & -2 \\ 1 & 6 & 7 & -5 \end{bmatrix}$, e)$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 7 \\ 4 & 7 & 12 \end{bmatrix}$

5. Zadane są macierze $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 1/7 \end{bmatrix}$. Wykonać obliczenia:
a) $BB^\top - 4C^\top$
b) $ABB^\top BB^\top D$

Do samodzielnego rozwiązania
kod 1101011.

1. Zadano funkcję $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ wzorem $f(x,y) = x^3y^2+y\ln(x+2y+1)+x+y$.
a)Znaleźć kierunek najszybszego wzrostu f w punkcie $P = (2,-1)$ oraz wyznaczyć tempo tego wzrostu w P.
b) Znaleźć równanie płaszczyzny stycznej do wykresu f w punkcie $(2,-1,9)$

2. Na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ określono $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ wzorem $f(x,y) = y^3 + x^2 + 4y^2 + 4xy + 2x + y$. Proszę znaleźć punkty krytyczne f (tzn. te punkty $\mathbb{R}^3$, w których zeruje się gradient f), obliczyć macierz drugich pochodnych

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}.$$

Określić które z punktów krytycznych funkcji f są punktami ekstremum lokalnego i jakiego typu.

3. Zadany jest układ równań:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = t \\ 4x_1 + 7x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 1 \end{cases}$$

gdzie parametr $t \in \mathbb{R}$.

a) Proszę zbadać metodą macierzową dla jakich wartości $t \in \mathbb{R}$ układ ten jest niesprzeczny

b) Proszę znaleźć zbiór rozwiązań tego układu metodą macierzową, dla tych wartości t, dla których układ jest niesprzeczny.

4. Zadana jest macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 2 & 1 & -1 \\ 5 & -5 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Wybrać spośród kolumn macierzy A bazę przestrzeni $R(A)$ rozpiętej na kolumnach A. Przedstawić pozostałe kolumny jako kombinacje bazowych. Jaki jest rząd macierzy A?

b) Znaleźć bazę przestrzeni $N(A) \subset \mathbb{R}^5$ opisanej równaniem $A[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^\top = [0, 0, 0]^\top$.

5. Zadane są macierze $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1/7 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix}$. Wykonać obliczenia:

a) $BB^\top - 5C^\top$

b) $ABB^\top DDBB^\top$

Kilka podobnych zadań:

1. Zadano funkcję $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ wzorem

$f(x, y) = \ln(x + y - 2) + xy^2 - y$.

a)Znaleźć kierunek najszybszego wzrostu f w punkcie $P = (2, 1)$ oraz wyznaczyć tempo tego wzrostu w P.

b) Znaleźć równanie płaszczyzny stycznej do wykresu f w punkcie $(2, 1, 1)$

2. Na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ określono $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ wzorem $f(x, y) = x^3 + 4x^2 + y^2 + 4xy + 9x + 6y$. Proszę znaleźć punkty krytyczne f (tzn. te punkty $\mathbb{R}^3$, w których zeruje się gradient f), obliczyć macierz drugich pochodnych

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}.$$

Określić które z punktów krytycznych funkcji f są punktami ekstremum lokalnego i jakiego typu.

3. Zadany jest układ równań liniowych z 4 niewiadomymi:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 = t \end{cases}$$

gdzie parametr $t \in \mathbb{R}$.

a) Proszę zbadać metodą macierzową dla jakich wartości $t \in \mathbb{R}$ układ ten jest niesprzeczny

b) Proszę znaleźć zbiór rozwiązań tego układu metodą macierzową, dla tych wartości t, dla których układ jest niesprzeczny.

4. Zadana jest macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

a) Wybrać spośród kolumn macierzy A bazę przestrzeni $R(A)$ rozpiętej na kolumnach A. Przedstawić pozostałe kolumny jako kombinacje bazowych. Jaki jest rząd macierzy A?

b) Znaleźć bazę przestrzeni $N(A) \subset \mathbb{R}^5$ opisanej równaniem $A[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^\top = [0, 0, 0, 0]^\top$.