Zadania przygotowujące do 2 kolokwium, Matematyka 2

1 czerwca 2017r.

Zadanie 1. Zadano macierz $A \in M_{m\times n}$ oraz kolumny b, b'.
a) określić rząd $r(A)$

b) Zbadać, czy któryś z układów $AX = b$, $AX = b'$, gdzie $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ jest niesprzeczny. Jeśli jest, to zapisać jego rozwiązanie ogólne w postaci $X = u + t_1v_1 + \cdots + t_pv_p$, gdzie $p = n - r(A)$ i kolumny $v_1, \ldots, v_p$ tworzą układ liniowo niezależny.

A) $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -1 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $b' = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Ponieważ oba układy mają tę samą macierz (współczynników) możemy je rozwiązać " na raz". Utworzymy najpierw macierz $A|b|b'$ o 7 kolumnach i 3 wierszach poprzez dopisanie do macierzy A kolumn b i b': $\begin{bmatrix} 2 & 6 & -1 & 0 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.
Poddamy ją operacjom wierszowym $w_2 - w_1, w_3 - w_1$, następnie $1/2w_1, 1/3w_2, 1/2w_3$ oraz $w_3 - w_2$ otrzymując macierz w postaci schodkowej $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1/2 & 0 & 2\frac{1}{2} & 1/2 & 1\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$, z której wnosimy, że układ z kolumną b stałych jest sprzeczny, natomiast z kolumną stałych b' jest niesprzeczny. Usuwamy wobec tego kolumnę 6 i macierz $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1/2 & 0 & 2\frac{1}{2} & 1\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ operacją $w_1 + 1/2w_2$ sprowadzamy do postaci schodkowej zredukowanej $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1/2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Widać z

tej macierzy, że $r(A) = 2$ i, że x_1 i x_3 możemy wybrać jako zmienne zależne, natomiast pozostałe zmienne jako zmienne wolne (parametry) które oznaczymy $t_1 = x_2, t_2 = x_4, t_3 = x_5$ zapisując rozwiązanie ogólne w postaci kolumny $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 3t_1 - \frac{1}{2}t_2 - 2t_3 \\ t_1 \\ -1 + t_2 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} +$ $t_2 \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Otrzymaliśmy więc poszukiwane przedstawienie rozwiązania ogólnego $X = u + t_1v_1 + t_2v_2 + t_3v_3$, w którym kolumny u, v_1, v_2, v_3 powstały przez kolejne wyłączanie stałych, a następnie współczynników przy t_1, t_2 i t_3.

Zadanie 1'. 1. Zadany jest układ równań z czterema niewiadomymi:

$$U_t : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 = t^2 \end{cases}$$

a) Określić zbiór wartości $t \in \mathbb{R}$, dla których układ powyższy jest niesprzeczny.

b) Sprawdzić, że dla $t = 2$ układ U_t jest niesprzeczny, znaleźć jego rozwiązanie ogólne, oraz zapisać jego rozwiązanie ogólne w postaci $X = u + t_1v_1 + \cdots + t_pv_p$, gdzie kolumny $v_1, \ldots, v_p$ tworzą układ liniowo niezależny.

Odp. a) Tworzymy macierz układu $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & t^2 \end{bmatrix}$. Kolejnymi operacjami wierszowymi $w_1 \leftrightarrow w_2, w_2 - 2w_1, w_3 - 4w_1, w_3 - w_2$ sprowadzamy ją do postaci schodkowej (a nawet schodkowej zredukowanej) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t^2 - 4 \end{bmatrix}$. Kryterium niesprzeczności układu jest następujące: po sprowadzeniu macierzy układu do postaci schodkowej nie może być elementu wiodącego w ostatniej kolumnie (kolumnie wyrazów wolnych). Zatem, w naszym przypadku układ jest niesprzeczny $\Leftrightarrow t^2 - 4 = 0$ czyli szukany zbiór wartości t to $\{-2, 2\}$.

b) dla $t = 2$ możemy skorzystać z uzyskanej macierzy w postaci schodkowej zredukowanej i sczytać odpowiedni układ równoważny $\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$, który przekształcimy do postaci rozwiązania ogólnego. Ponieważ wyrazy wiodące w macierzy w postaci schodkowej są w kolumnach nr. 1 i 2, zatem wybieramy x_1 i x_2 jako zmienne zależne: $\begin{cases} x_1 = 1 - x_3 - x_4 \\ x_2 = x_3 + 3x_4 \end{cases}$. Oznaczmy parametry (zmienne wolne) $t_1 = x_3, t_2 = x_4$ Stąd kolumna reprezentująca rozwiązanie ogólne ma postać:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - t_1 - t_2 \\ t_1 + 3t_2 \\ t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Zadanie 2. Niech $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. a) Obliczyć B^{-1}. b) Rozwiązać układ równań $BX = \overrightarrow{b}$, gdzie $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ dla dowolnego $\overrightarrow{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$.

Odp. Do znalezienia B^{-1} użyjemy algorytmu opierającego się na przekształceniach elementarnych wierszowych. Tworzymy "długą" macierz B', powstałą przez dopisanie do B macierzy jednostkowej I_4, $B' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Przekształceniami $w_3 - 2w_1$, a następnie $w_2 \leftrightarrow w_4$ sprowadzamy ją do postaci schodkowej $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, którą sprowadzamy przez $w_1 + w_4$ do postaci schodkowej zredukowanej: $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

"Lewa połówka" tak wyznaczonej macierzy C to I_4, oznacza to, że "prawa połówka" C to $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (możemy sprawdzić poprawność obliczeń mnożąc otrzymaną "prawą połówkę" przez B. Powinniśmy otrzymać macierz jednostkową). Użyjemy otrzymanej macierzy B^{-1} do rozwiązania układu $BX = \overrightarrow{b}$. Mnożąc bowiem (z lewej strony) obie strony tej równości przez B^{-1} otrzymujemy $X = B^{-1}\overrightarrow{b}$ czyli $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 + b_2 \\ b_4 \\ -2b_1 + b_3 \\ b_2 \end{bmatrix}$

Zadanie 3. Przypomnijmy podstawowe wzory algebry macierzy : $(A+B)(C+D) = AC+AD+BC+BD$, $a(AB) = A(aB)$, gdzie A, B to macierze zaś $a \in \mathbb{R}$, $(AB)^\top = B^\top A^\top$, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, $(A^n)^m = A^{nm}$, $A^nA^m = A^{m+n}$, $(A^\top)^n = (A^n)^\top$ gdzie dla A odwracalnej n, m mogą przyjmować również dowolne wartości całkowite. Należy pamiętać jednak, że mnożenie macierzy nie jest przemienne, czyli na ogół (czyli poza specjalnie dobranymi A iB) mamy $AB \neq BA$ oraz $(AB)^n \neq A^nB^n$. W szczególności musimy uwzględniać przy rozwiązywaniu równań macierzowych , z której strony mnożymy obie strony równości (przy "skracaniu"). Przykłady: a) niech $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Rozwiązać równanie macierzowe $A(3X) = A^\top 2X + B$, gdzie X oznacza niewiadomą macierz 2×3 (czyli o 2 wierszach i trzech kolumnach). Odp. Odejmując od obu stron równości $A^\top 2X$ otrzymujemy $3AX - 2A^\top X = B$ czyli $(3A - 2A^\top)X = B$ *). Oznaczmy macierz $3A - 2A^\top = 3\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = D$. Ma ona wyznacznik $\det D = 2 \cdot 4 = 8 \neq 0$, jest więc odwracalna, i macierz $D^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -\frac{5}{8} \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix}$. Mnożąc obie strony równości *) z lewej strony przez D^{-1} otrzymujemy: $X = D^{-1}B$, czyli $X = \begin{bmatrix} 1/2 & -\frac{5}{8} \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1\frac{1}{8} & -\frac{5}{4} \\ 0 & -1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$.

b) Niech A będzie taką macierzą, że $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. Znaleźć macierz $(((A^{-1})^\top A)^\top A)^{-1}$. Odp. Mamy $(((A^{-1})^\top A)^\top A)^{-1} = (A^\top((A^{-1})^\top)^\top A)^{-1} = (A^\top A^{-1}A)^{-1} = (A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

Zadanie 4. Własności wyznacznika: $\det(AB) = \det A \det B$, $\det A^\top = \det A$, $\det A^n = (\det A)^n$, $\det(aA) = a^n \det A$, gdzie A jest macierzą $n \times$

n i a jest liczbą. Przykłady: Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, zaś $B =$

$\begin{bmatrix} 1 & 29 & 33 & 14 \\ 0 & 3 & 31 & 47 \\ 0 & 0 & -1 & 41 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

Obliczyć $\det A$ oraz d) obliczyć

$\det((B^\top \cdot B)^2)$ Odp. Wiemy, że przekształcenia elementarne macierzy polegające na dodaniu do wiersza innego wiersza pomnożonego przez liczbę nie zmieniają wartości wyznacznika, zaś przekształcenie polegające na zamianie wierszy macierzy zmienia wartość wyznacznika na liczbę przeciwną (czyli zmienia znak wyznacznika). Zastosujmy do macierzy A przekształcenia $w_3 - 2w_1 - w_2$ oraz $w_4 - w_1 - 2w_2$ (możemy naraz wykonać kilka operacji, o ile nie zmieniamy w ich trakcie wierszy, których wielokrotności dodajemy). Mamy $\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & -8 & -11 \end{bmatrix}$. Macierz po prawej stronie ma strukturę blokową $\begin{bmatrix} B & C \\ \mathbf{0} & D \end{bmatrix}$, gdzie $\mathbf{0}$ oznacza blok złożony z zer. Wyznacznik takiej macierzy to $\det B \det D$, zatem $\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} -8 & -8 \\ -8 & -11 \end{bmatrix} = 3 \cdot 24 = 72$. d) Wyznacznik macierzy B możemy obliczyć, korzystając z następujących ogólnych zależności: $\det(XY) = \det X \det Y$, $\det X^n = (\det X)^n$, $\det X^\top = \det X$. Stąd $\det((B^\top \cdot B)^2) = (\det B \cdot \det B)^2 = \det B^4$. Macierz B jest górnie trójkątna (elementy poniżej przekątnej są 0), czyli jej wyznacznik to iloczyn elementów na przekątnej. Mamy więc $\det((B^\top \cdot B)^2) = (1 \cdot 3 \cdot (-1) \cdot 1)^4 = (-3)^4 = 81$.

Zadanie 5. Niech $A_t = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & t \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, gdzie $t \in \mathbb{R}$.

a) Określić dla jakich wartości $t \in \mathbb{R}$ macierz A_t jest odwracalna. b) Znaleźć taką wartość $t \in \mathbb{R}$, aby w macierzy A_t^{-1} liczba w 1 wierszu i 3 kolumnie była równa 2. Odp. a) Wiemy, że macierz A_t jest odwracalna (tzn. ma macierz odwrotną A_t^{-1}) $\Leftrightarrow$ $\det A_t \neq 0$. Ponieważ $\det A_t = 2 + 6t + 0 - (-4) - 0 - t = 6 + 5t$ zatem musimy rozwiązać nierówność $6 + 5t \neq 0$. Czyli macierz A_t jest odwracalna $\Leftrightarrow t \neq -\frac{6}{5}$. b) Jeśli oznaczymy c_{ij} element macierzy A_t^{-1} w wierszu nr i i kolumnie nr j, to zachodzi następujący wzór $c_{ij} = \frac{1}{\det A_t}(-1)^{i+j}\det A_{(ji)}$, gdzie $A_{(ji)}$ oznacza macierz powstałą z A_t przez usunięcie **wiersza nr j** i **kolumny nr i**. Zatem otrzymujemy $c_{13} = \frac{1}{\det A_t}(-1)^{1+3}\det A_{(31)} = \frac{1}{6+5t}\det\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & t \end{bmatrix} = \frac{1}{6+5t}(3t+2)$. Z warunków zadania mamy do rozwiązania równość $c_{13} = 2$ czyli $\frac{1}{6+5t}(3t+2) = 2$. Otrzymujemy więc $3t+2 = 12+10t$ czyli $t = -\frac{10}{7}$.

Ćw. Kilka dodatkowych ćwiczeń: Obliczyć macierze odwrotne do macierzy: $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 6 & 10 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Obliczyć $\det(C^8(C^\top)^{-6})$

$$\text{Odp.}A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix},\ B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix},$$

$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & -1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -3/4 & 3/4 & 1/4 \end{bmatrix}$. $\det(C^8(C^\top)^{-6}) = 16$