Kolokwium z Analizy Matematycznej, typy zadań

13 listopada 2017

Zadanie 1 Stopa procentowa wynosi 10% . Jaką sumę dostanę po 3 latach, jeśli ulokowałem $K_0 = 10000$ zł

a) przy corocznej kapitalizacji odsetek b) przy ciągłej kapitalizacji c) jak długo muszę czekać na potrojenie kapitału przy ciągłej kapitalizacji odsetek. d) Pewne ryzykowne 10-letnie obligacje oprocentowane są stopą 30% p.a., przy kwartalnej kapitalizacji odsetek (całość wypłacana z chwilą wygaśnięcia obligacji). Jakie powinno być oprocentowanie tych obligacji przy kapitalizacji ciągłej, gwarantujące tę samą końcową wypłatę.

Odpowiedź: a) stosuje się wzór na kapitał końcowy $K_n = K_0(1+r)^n$, gdzie $r-$ stopa procentowa wyrażona ułamkiem, n–liczba lat. Zatem $K_3 = K_0(1+0,1)^3 = 10000 \cdot 1,331 = 13310$.

b) Mamy wzór $K_n = K_0 e^{rn}$, czyli $K_3 = 10000 \cdot e^{0,1 \cdot 3} = 10000 \cdot e^{0,3} \approx 10000 \cdot 1,3498 = 13498$

c) Rozwiązujemy równanie $e^{0,1n} = 3$, czyli $0,1n = \ln 3$ zatem $n = 10 \ln 3 \approx 10 \cdot 1,09 \approx 11$.

d) Należy zastosować wzory na kapitał końcowy przy n równych okresach kapitalizacyjnych w roku $K = K_0(1+r/n)^{nt}$ i kapitalizacji ciągłej $K = K_0 e^{rt}$. Dostajemy równanie $K_0(1+0,3/4)^{40} = K_0 e^{10r}$. Stąd $r = 4\ln(1+0,3/4)$.

Zadanie 2. Proszę obliczyć granicę:Jeśli mamy w liczniku i mianowniku sumę wyrazów $\to \pm\infty$ to wyłączamy jako czynnik składnik "najszybciej dążący" $\to \infty$. Przykłady: $\frac{3x^4+2x^3+3x^2+1}{4x^2+x^2+\log x} = \frac{x^4(3+2/x^3+3/x^2+1/x^4)}{x^4(4+1/x^2+(\log x)/x^4)} \to 3/4$ dla $x \to \infty$, $\frac{5\cdot(3,5)^x+2x^{100}}{2(3,5)^x+\sin x} = \frac{(3,5)^x(5+2x^{100}/(3,5)^x)}{(3,5)^x(2+\sin x/(3,5)^x)} \to 5/2$ dla $x \to \infty$. Skorzystaliśmy z tego, że mamy "hierarchię" wzrostu funkcji: f ograniczona, $f(x) = \log_a x$ dla $a > 1$, $f(x) = b^x$ dla $b > 1$ (dla $b' > b$ bardziej na prawo), $f(x) = c^x$ dla $c > 0$ (dla $c' > c$ bardziej na prawo) w następującym sensie: jeśli g jest na prawo od h to $h(x)/g(x) \to 0$ przy $x \to \infty$.

Proszę obliczyć granice:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{2x}}{\ln(1-3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-3x}{\ln(1-3x)} \frac{x}{-3x} (\frac{e^x-1}{x} - 2\frac{e^{2x}-1}{2x}) = 1/3$

b) $\lim_{x\to 1} x^{1/(\sqrt[3]{x}-1)} = \lim_{x\to 1}(1+(x-1))^{(1/(x-1))(x-1)/(\sqrt[3]{x}-1)} = e^3$ ponieważ $(x-1)/(\sqrt[3]{x}-1) = x^{2/3} + x^{1/3} + 1 \to 3$ jeśli $x \to 1$

Zadanie 3. Proszę obliczyć pochodne następujących funkcji: a) $\sin x \ln x$, b) $\log_{x^2+1}(\cos x + x)$, c) $\arctan(\ln(\sin x))$, d) $(3x+x^2)^{(x+1)^3}$. odpowiedź a) $\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}$, b) korzystamy ze wzoru $\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$, zatem $(\log_{x^2+1}(\cos x + x))' = (\frac{\ln(\cos x+x)}{\ln(x^2+1)})' = \frac{(\ln(\cos x+x))' \ln(x^2+1) - \ln(\cos x+x)(\ln(x^2+1)')}{\ln^2(x^2+1)} = \frac{-\frac{\ln(x^2+1)}{\cos x+x}(\sin x+1) - \frac{\ln(\cos x+x)}{x^2+1}2x}{\ln^2(x^2+1)}$, c) $\frac{1}{\ln^2(\sin x)+1}\frac{1}{\sin x}\cos x$.

Zadanie 4. Zadano funkcję $f(x) = \sqrt[3]{x} + \ln(2x-15)$ dla $x > 7\frac{1}{2}$.

a) Znaleźć równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0)) = (8,2)$

b) Obliczyć pochodną funkcji f^{-1} odwrotnej do f w punkcie 2.

Odp. a) Obliczamy $f'(x) = 1/3x^{-2/3} + 2/(2x-15)$, skąd $f'(8) = 1/12 + 2 = 2\frac{1}{12}$. Zatem równanie stycznej jest $y = 2 + 2\frac{1}{12}(x-8)$ po uproszczeniu $y = 2\frac{1}{12}x - 14\frac{2}{3}$. b) Ponieważ $f(8) = 2$ zatem $f^{-1}(2) = 8$. Stąd $(f^{-1})'(2) = 1/f'(8) = 1/(2\frac{1}{12}) = 12/25$

Zadanie 5. Zadano funkcję $f(x)$ na $\mathbb{R}$ wzorami: $f(x) = x^2 + x + a$ dla $x \le 0$ oraz $f(x) = (2/3 + (x+1)^{3/4}/3)^{1/x}$ dla $x > 0$. Dobrać tak wartość parametru $a \in \mathbb{R}$, aby f była ciągła.

Odp. Aby f była ciągła musi być ciągła w w każdym punkcie. Dla $x \ne 0$ funkcja f jest ciągła jako funkcja elementarna określona w przedziałach $-\infty, 0)$ oraz $(0, \infty)$. Pozostaje do zbadania ciągłość f dla $x = 0$. Warunkiem koniecznym i wystarczającym jest by $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$. Mamy: $\lim_{x\to 0^-} f(x) = a$ zaś dla $x > 0$ zachodzi $f(x) = (1+((x+1)^{3/4}-1)/3)^{1/x} = (1+((x+1)^{3/4}-1)/3)^{3/((x+1)^{3/4}-1)((x+1)^{3/4}-1)/(3x)} \to e^{1/4}$. Skorzystaliśmy z tego, że $(1+t)^{1/t} \to e$ dla $t \to 0$ (tutaj $t = ((x+1)^{3/4}-1)/3$, oraz $((x+1)^{3/4}-1)/x \to 3/4$ dla $x \to 0$. Zatem dla ciągłości potrzeba i wystarcza $a = e^{1/4}$.