Kolokwium z Analizy Matematycznej, typy zadań

6 listopada 2011

Zadanie 1 Stopa procentowa wynosi 10% . Jaką sumę dostanę po 3 latach, jeśli ulokowałem $K_0 = 10000$ zł

a) przy corocznej kapitalizacji odsetek b) przy ciągłej kapitalizacji c) jak długo muszę czekać na potrojenie kapitału przy ciągłej kapitalizacji odsetek.

Odpowiedź: a) stosuje się wzór na kapitał końcowy $K_n = K_0(1+r)^n$, gdzie r– stopa procentowa wyrażona ułamkiem, n–liczba lat. Zatem $K_3 = K_0(1+0,1)^3 = 10000 \cdot 1,331 = 13310$.

b) Mamy wzór $K_n = K_0 e^{rn}$, czyli $K_3 = 10000 \cdot e^{0,1\cdot 3} = 10000 \cdot e^{0,3} \approx 10000 \cdot 1,3498 = 13498$

c) Rozwiązujemy równanie $e^{0,1n} = 3$, czyli $0,1n = \ln 3$ zatem $n = 10 \ln 3 \approx 10 \cdot 1,09 \approx 11$.

Zadanie 2. Proszę obliczyć granicę:Jeśli mamy w liczniku i mianowniku sumę wyrazów $\to \pm\infty$ to wyłączamy jako czynnik składnik "najszybciej dążący" $\to \infty$. Przykłady: $\frac{3x^4+2x^3+3x^2+1}{4x^2+x^2+\log x} = \frac{x^4(3+2/x^3+3/x^2+1/x^4)}{x^4(4+1/x^2+(\log x)/x^4)} \to 3/4$ dla $x \to \infty$, $\frac{5\cdot(3{,}5)^x+2x^{100}}{2(3{,}5)^x+\sin x} = \frac{(3{,}5)^x(5+2x^{100}/(3{,}5)^x)}{(3{,}5)^x(2+\sin x/(3{,}5)^x)} \to 5/2$ dla $x \to \infty$. Skorzystaliśmy z tego, że mamy "hierarchię" wzrostu funkcji: f ograniczona, $f(x) = \log_a x$ dla $a > 1$, $f(x) = b^x$ dla $b > 1$ (dla $b' > b$ bardziej na prawo), $f(x) = c^x$ dla $c > 0$ (dla $c' > c$ bardziej na prawo) w następującym sensie: jeśli g jest na prawo od h to $h(x)/g(x) \to 0$ przy $x \to \infty$.

Proszę obliczyć granice:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-3x)}{e^x-e^{2x}} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-3}{(1-3x)(e^x-2e^{2x})} = 3$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{x\ln(1+\sin x)}{\cos(3x)-1}$

c) $\lim_{x\to 0}(e^x+2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{(\ln(e^x+2x))/x} = e^{\lim(\ln(e^x+2x))/x} = e^3$, gdzie osobno policzyliśmy granicę wykładnika z reguły de L'Hospitala $\lim_{x\to 0}(\ln(e^x+2x))/x = \lim_{x\to 0} \frac{(\ln(e^x+2x))'}{x'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x+2}{e^x+2x} = 3$

Zadanie 3. Proszę obliczyć pochodne następujących funkcji: a) $\sin x \ln x$, b) $\log_{x^2+1}(\cos x + x)$, c) $\arctan(\ln(\sin x))$, d) $(3x+x^2)^{(x+1)^3}$. odpowiedź a) $\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}$, b) korzystamy ze wzoru $\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$, zatem $(\log_{x^2+1}(\cos x+$

$x))' = (\frac{\ln(\cos x+x)}{\ln(x^2+1)})' = \frac{(\ln(\cos x+x))'\ln(x^2+1)-\ln(\cos x+x)(\ln(x^2+1)')}{\ln^2(x^2+1)} = \frac{-\frac{\ln(x^2+1)}{\cos x+x}(\sin x+1)-\frac{\ln(\cos x+x)}{x^2+1}2x}{\ln^2(x^2+1)}$,
c) $\frac{1}{\ln^2(\sin x)+1}\frac{1}{\sin x}\cos x$,

Zadanie 4. Określona jest funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ wzorem $f(x) = x^4 - 8x^2 + 3$ na zbiorze $D = [-1, 3]$. Proszę uzasadnić, że przyjmuje ona wartość największą i najmniejszą, a następnie znaleźć te wartości.

4'.Określona jest funkcja $f : D \to \mathbb{R}$ wzorem $f(x) = x^2 - 6|x - 2|$ na zbiorze $D = [-2, 4]$. Proszę uzasadnić, że przyjmuje ona wartość największą i najmniejszą, a następnie znaleźć te wartości. Rozwiązanie. Funkcja f jest ciągła i określona na przedziale domkniętym, zatem na mocy twierdzenia Weierstrassa osiąga zarówno wartość największą jak i najmniejszą. Wartości te funkcja może osiągnąć a) na krańcach przedziału b) w punktach wewnątrz przedziału w których pochodna f przyjmuje wartość 0, c) w punktach w których nie ma(lub może nie być) pochodnej. W przypadku f jedyny taki punkt to 2, w którym wyrażenie pod znakiem modułu zmienia znak. Dla $x \in (-2, 2)$ mamy $f(x) = x^2 + 6(x - 2)$ czyli $f'(x) = 2x + 6$ czyli $f'(x) \neq 0$ w tym przedziale. Dla $x \in (2, 4)$ mamy $f(x) = x^2 - 6(x - 2)$, czyli $f'(x) = 2x - 6$, zatem $f'(x) = 0$ jedynie dla $x = 3$. Obliczamy: a) $f(-2) = -20$, $f(4) = 4$,b) $f(3) = 3$,c) $f(2) = 4$. Zatem $\max f = f(2) = f(4) = 4$ i $\min f = f(-2) = -20$.

Zadanie 4". Dany jest kwadratowy arkusz papieru o boku 18 cm. Na jego rogach wycięto jednakowe kwadraty i z pozostałej części sklejono prostokątne pudełko. Jaki powinien być bok wyciętego kwadratu aby pojemność pudełka była największa?

Rozwiązanie Niech x oznacza bok wyciętych kwadratów. Z warunków zadania mamy $x \in [0, 9]$. Objętość (w cm^3) $V(x) = x(18 - 2x)^2$. Funkcja V jest ciągła, osiąga zatem wartość największą i najmniejszą na domkniętym przedziale $[0, 9]$ na mocy tw. Weierstrassa. Rozwiązujemy równanie $V'(x) = 0$ czyli $(18 - 2x)^2 - 4x(18 - 2x) = 0$. To równanie ma dwa pierwiastki, $x_1 = 9$ i $x_2 = 3$. Ponieważ $V(0) = V(9) = 0$ zatem $V(3) = 432$ jest największą możliwą objętością, czyli należy wybrać $x = 3$

Zadanie 4"'. Firma transportowa zajmuje przewozami na trasie S. Koszt przewozu składa się z dwóch części, zapłaty kierowcy, któremu się płaci 16 zł za godzinę i kosztu paliwa, które kosztuje 4 zł za litr.'Zużycie paliwa na 1 km wynosi $\frac{v^2}{256000}$ litrów, gdzie v jest prędkością jazdy w km na godzinę. Znaleźć prędkość jazdy kierowców, która zminimalizuje całkowity koszt przewozu.

Rozwiązanie. Ponieważ czas przewozu wynosi $T = S/v$ zatem koszt całkowity $K_c(v) = Zap + K_{pal} = T \cdot 16 + S \cdot 4 \cdot v^2/256000 = 16S/v + Sv^2/256000 = S(16/v + 4v^2/256000)$. Z warunków zadania $v \in (0, \infty)$.

Kiedy $v \to 0$ to $Zap \to \infty$, zaś $K_{pal} \to 0$, kiedy $v \to \infty$ to $Zap \to 0$, zaś $K_{pal} \to \infty$. Wobec tego, $K_c(v) \to \infty$ zarówno dla $v \to 0$ jak i dla $v \to \infty$. Stąd, ponieważ funkcja K_c jest ciągła, zatem osiąga ona wartość najmniejszą dla pewnego $v_0 \in (0, \infty)$. Na mocy Zasady Fermata, $K_c'(v_0) = 0$, czyli po zróżniczkowaniu K_c mamy $S(-16/v_0^2 + 8v_0/256000) = 0$, a więc $v_0^3 = 512000$, zatem optymalna prędkość to $v_0 = 80$ km na godz.

Zadanie 5. Na przedziale $(0, \infty)$ określona jest funkcja $f(x) = x^3 \ln x$. Proszę: a) znaleźć granice (skończone lub nie) funkcji f na krańcach przedziału określoności, b) obliczyć pierwszą i drugą pochodną f,

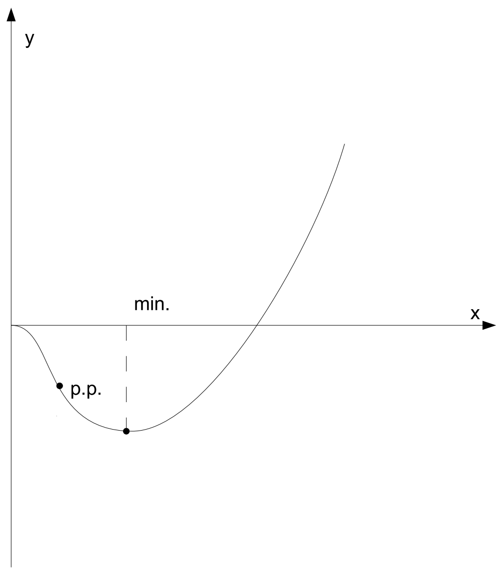
c) wyznaczyć przedziały monotoniczności f oraz jej ekstrema lokalne,

d) określić przedziały, w których funkcja f jest wklęsła lub wypukła i jej punkty przegięcia,

e)naszkicować wykres f,

f) podać równanie stycznej do wykresu f w punkcie (e, e^3).

Mamy $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{1/x^3} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-3/x^4} = \lim_{x\to 0^+} -x^3/3 = 0$, natomiast $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. $f'(x) = 3x^2 \ln x + x^3(1/x) = x^2(3\ln x + 1)$. Stąd $f'(x) < 0$ dla $x < e^{-1/3}$, $f'(e^{-1/3}) = 0$ oraz $f'(x) > 0$ dla $x > e^{-1/3}$. Funkcja f jest więc malejąca w przedziale $(0, e^{-1/3})$, rosnąca w przedziale $(e^{-1/3}, \infty)$ i ma minimum (nawet globalne) w $e^{-1/3}$. Druga pochodna $f''(x) = 6x(\ln x + 5/6)$ jest ujemna w $(0, e^{-5/6})$, dodatnia w $(e^{-5/6}, \infty)$, zatem f jest ściśle wklęsła w pierwszym z tych przedziałów, ściśle wypukła w drugim i jej wykres ma w punkcie $(e^{-5/6}, -5e^{-5/2}/6)$ przegięcie.



Rysunek 1: Wykres funkcji f