kod 1011101

1. a) Niech $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Obliczyć B^{-1}.

b) Niech C będzie macierzą 4×4. Jak, korzystając z wyznaczonej macierzy B^{-1} rozwiązać równanie macierzowe $B^\top(X+C)B = C$, tzn. obliczyć X?

Odp. Do znalezienia B^{-1} użyjemy algorytmu opierającego się na przekształceniach elementarnych wierszowych. Tworzymy "długą" macierz B', powstałą przez dopisanie do B macierzy jednostkowej I_4, $B' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Przekształceniami $w_3 - 2w_1$, a następnie $w_2 \leftrightarrow w_4$ sprowadzamy ją do postaci schodkowej $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, którą sprowadzamy przez $w_1 + w_4$ do postaci schodkowej zredukowanej: $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. "Lewa połówka" tak wyznaczonej macierzy C to I_4, oznacza to, że "prawa połówka" C to $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (możemy sprawdzić poprawność obliczeń mnożąc otrzymaną "prawą połówkę" przez B. Powinniśmy otrzymać macierz jednostkową).

b) Zachodzi ogólny wzór $(B^\top)^{-1} = (B^{-1})^\top$. Stąd, mnożąc obie strony równości z **lewej** strony przez $(B^\top)^{-1} = (B^{-1})^\top$ mamy $(B^\top)^{-1}B^\top(X + C)B = (B^\top)^{-1}C$ czyli $I_4(X+C)B = (B^{-1})^\top C$ czyli $(X+C)B = (B^{-1})^\top C$. Mnożąc teraz obie strony z **prawej** strony przez B^{-1} otrzymujemy $(X + C)BB^{-1} = (B^{-1})^\top CB^{-1}$ czyli $X + C = (B^{-1})^\top CB^{-1}$. Odejmując od obu stron C wyznaczamy w końcu $X = (B^{-1})^\top CB^{-1} - C$ (proszę zwrócić uwagę na to, że, z powodu nieprzemienności mnożenia macierzy musimy uwzględniać stronę, z której "skracamy" równość).

1'. Niech $A_t = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & t \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, gdzie $t \in \mathbb{R}$.

a) Określić dla jakich wartości $t \in \mathbb{R}$ macierz A_t jest odwracalna. b) Znaleźć taką wartość $t \in \mathbb{R}$, aby w macierzy A_t^{-1} liczba w 1 wierszu i 3 kolumnie była równa 2. Odp. a) Wiemy, że macierz A_t jest odwracalna (tzn. ma macierz odwrotną A_t^{-1}) $\Leftrightarrow$ $\det A_t \neq 0$. Ponieważ $\det A_t = 2 + 6t + 0 - (-4) - 0 - t = 6 + 5t$ zatem musimy rozwiązać nierówność $6 + 5t \neq 0$. Czyli macierz A_t jest odwracalna $\Leftrightarrow t \neq -\frac{6}{5}$. b) Jeśli oznaczymy c_{ij} element macierzy A_t^{-1} w wierszu nr i i kolumnie nr j, to zachodzi następujący wzór $c_{ij} = \frac{1}{\det A_t}(-1)^{i+j} \det A_{(ji)}$, gdzie $A_{(ji)}$ oznacza macierz powstałą z A_t przez usunięcie **wiersza nr j** i **kolumny nr i**. Zatem otrzymujemy $c_{13} = \frac{1}{\det A_t}(-1)^{1+3} \det A_{(31)} = \frac{1}{6+5t} \det \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & t \end{bmatrix} = \frac{1}{6+5t}(3t+2)$. Z warunków zadania mamy do rozwiązania równość $c_{13} = 2$ czyli $\frac{1}{6+5t}(3t + 2) = 2$. Otrzymujemy więc $3t + 2 = 12 + 10t$ czyli $t = -\frac{10}{7}$.

2.

a) Znaleźć objętość równoległościanu w $\mathbb{R}^3$ o wierzchołku $A = (1, 2, 1)$ i przyległych do niego wierzchołkach $B = (1, 2, 8)$, $C = (1, 6, 1)$, $D = (2, 3, 5)$. b) Niech $A = (2, 5)$ będzie wierzchołkiem równoległoboku w $\mathbb{R}^2$ oraz niech $B = (1, 6)$ i $D_t = (4, t)$, będą wierzchołkami tego równoległoboku przyległymi do A. Dla jakiej wartości $t \in \mathbb{R}$ pole równoległoboku wyniesie 10?

c) Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, zaś $B = \begin{bmatrix} 1 & 29 & 33 & 14 \\ 0 & 3 & 31 & 47 \\ 0 & 0 & -1 & 41 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

Obliczyć $\det A$ oraz d) obliczyć

$\det((B^\top \cdot B)^2)$. Odp. a) Objętość V równoległościanu można obliczyć jako wartość bezwzględną wyznacznika $|\det M|$, gdzie M oznacza macierz, której wierszami są wektory $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ (wektor wyznaczamy odejmując od końca początek). Mamy $\overrightarrow{AB} = (0, 0, 7), \overrightarrow{AC} = (0, 4, 0), \overrightarrow{AD} = (1, 1, 4)$. Stąd $V = |\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 7 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} = |-28| = 28$. b) Pole równoległoboku to $P = |\det N|$, gdzie N oznacza macierz, której wierszami są $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}$. Zatem $P = |\det \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & (t-5) \end{bmatrix}| = |5 - t - 2| = |3 - t|$. Mamy więc równanie $|3-t| = 10$ czyli $3-t = 10$ lub $t-3 = 10$ czyli $t = -7$ lub $t = 13$. c) Wiemy, że przekształcenia elementarne macierzy polegające na dodaniu do wiersza innego wiersza pomnożonego przez liczbę nie zmieniają wartości wyznacznika, zaś przekształcenie polegające na zamianie wierszy macierzy zmienia wartość wyznacznika na liczbę przeciwną (czyli zmienia znak wyznacznika). Zastosujmy do macierzy A przekształcenia $w_3 - 2w_1 - w_2$ oraz $w_4 - w_1 - 2w_2$ (możemy naraz wykonać kilka operacji, o ile nie zmieniamy w ich trakcie wierszy, których wielokrotności dodajemy). Mamy $\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & -8 & -11 \end{bmatrix}$.

Macierz po prawej stronie ma strukturę blokową $\begin{bmatrix} B & C \\ \mathbf{0} & D \end{bmatrix}$, gdzie $\mathbf{0}$ oznacza blok złożony z zer. Wyznacznik takiej macierzy to $\det B \det D$, zatem $\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} -8 & -8 \\ -8 & -11 \end{bmatrix} = 3 \cdot 24 = 72$. d) Wyznacznik macierzy B możemy obliczyć, korzystając z następujących ogólnych zależności: $\det(XY) = \det X \det Y$, $\det X^n = (\det X)^n$, $\det X^\top = \det X$. Stąd $\det((B^\top \cdot B)^2) = (\det B \cdot \det B)^2 = \det B^4$. Macierz B jest górnie trójkątna (elementy poniżej przekątnej są 0), czyli jej wyznacznik to iloczyn elementów na przekątnej. Mamy więc $\det((B^\top \cdot B)^2) = (1 \cdot 3 \cdot (-1) \cdot 1)^4 = (-3)^4 = 81$.

3 Niech w $\mathbb{R}^4$ zadane będą wektory $a = [1, 1, 1, 0]^\top$, $b = [1, 1, 0, -1]^\top$, $c = [2, 0, 1, 2]^\top$

a) Obliczyć długość wektora a oraz odległość od a do b.

Które z powyższych wektorów a, b, c są wzajemnie prostopadłe?

b) Znaleźć w $V = lin(b, c)$ wektor najbliższy do a. (Jest to rzut prostopadły a na V.) Odp. Długość wektora $a = [a_1, \ldots, a_n]^\top$ to liczba $||a|| = \sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}$. Czyli $||a|| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{3}$. Odległość od a do b to długość $||a - b|| = ||[0, 0, -1, 1]^\top|| = \sqrt{)^2 + 0^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Wektory v, w są prostopadłe ($v \perp w$) $\Leftrightarrow$ ich iloczyn skalarny $v \bullet w = 0$. Stąd zachodzi jedynie $b \perp c$. b) Rzut prostopadły wektora w na przestrzeń V możemy obliczyć ze wzoru $P_V(w) = A(A^\top A)^{-1} A^\top w$, gdzie A oznacza macierz, której kolumny tworzą bazę V. Ponieważ wektory b i c są liniowo niezależne zatem tworzą bazę $V = lin(b, c)$. Stąd możemy przyjąć $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ oraz mamy $P_V(a) = A(A^\top A)^{-1}(A \top a)$. Obliczamy:

$$(A^\top A)^{-1} = (\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix})^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}^{-1} = \tfrac{1}{27} \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},$$

$A^\top a = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. Stąd $(A^\top A)^{-1} A^\top a = \frac{1}{27} \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} =$ $\begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$. Ostatecznie $P_V(a) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \\ 0 \end{bmatrix}$ (test poprawności obliczeń jest następujący: musi być $a - P_V(a) \perp b$ i $a - P_V(a) \perp c$)

4. a) Sprzedaż napojów chłodzących kawiarni wynosiła w kolejnych miesiącach $y_1 = 3, y_2 = 6, y_3 = 3, y_4 = 6, y_5 = 6$ (w dziesiątkach tysięcy złotych). Średnie temperatury tych pięciu miesięcy to kolejno $t_1 = -4, t_2 = -1, t_3 = 0, t_4 = 2, t_5 = 3$. Znaleźć, najlepiej dobraną do danych zależność sprzedaży od średniej temperatury w miesiącu postaci $y = mt + c$, gdzie $m, c \in \mathbb{R}$. b) Synoptycy prognozują, że w nadchodzącym miesiącu temperatura średnio wyniesie 4 stopnie. Z jaką sprzedażą należy się liczyć? Odp. Parametry m i c można obliczyć ze wzoru: $\begin{bmatrix} m \\ c \end{bmatrix} = (A^\top A)^{-1} A^\top Y$, gdzie macierz $A = \begin{bmatrix} t_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ t_n & 1 \end{bmatrix}$, zaś kolumna $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$. Czyli w naszym przypadku $A = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ oraz $Y = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$. Obliczamy: $\begin{bmatrix} m \\ c \end{bmatrix} = (A^\top A)^{-1} A^\top Y =$ $(\begin{bmatrix} -4 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix})^{-1} \begin{bmatrix} -4 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 12 \\ 24 \end{bmatrix} =$ $(1/150) \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/5 \\ 24/5 \end{bmatrix}$. Czyli poszukiwana zależność ma postać $y = (2/5)t + 4\frac{4}{5}$ b) Skoro spodziewamy się temperatury na poziomie $t = 4$ stopni, więc zgodnie ze znalezioną zależnością możemy oczekiwać sprzedaży za około $((2/5)4 + 4\frac{4}{5})10000 = 64000$ zł. (W obu poprzednich zadaniach zastosowaliśmy wzór na macierz odwrotną dla 2×2 macierzy: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$).