Metoda mnożników Lagrange'a

Mirosław Sobolewski

31 maja 2012

Metoda mnożników Lagrange'a opiera się na następującym twierdzeniu:

Twierdzenie 1. Niech $f : U \to \mathbb{R}$ będzie funkcją gładką na zbiorze otwartym na płaszczyźnie. Niech $F : U \to \mathbb{R}$ bedzie funkcją gładką, której gradient ∇F nie staje się zerowy w żadnym punkcie zbioru M opisanego przez $M = \{(x, y) \in U : F(x, y) = c\}$. Jeśli funkcja f przyjmuje na zbiorze M wartość minimalną lub maksymalną w punkcie $(a, b) \in M$ to (a, b) spełnia układ równań: (*) $\begin{cases} \nabla f(a,b) = & \lambda \nabla F(a,b) \\ F(a,b) = c \end{cases}$

dla pewnej liczby $\lambda \in \mathbb{R}$ nazywanej *mnożnikiem Lagrange'a.*

Z użyciem pochodnych cząstkowych układ ten zapisuje się:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = & \lambda \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = & \lambda \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \\ F(x,y) = c \end{cases}$$

(Tw. 4.18 i uwaga 4.19 ze str. 64 skryptu Kysiaka i Pola). Wymienione twierdzenie jest użytecznym narzędziem znajdywania najmniejszych i największych wartości funkcji określonych na podzbiorach $\mathbb{R}^2$, opisanych równaniem. Należy zwrócić uwagę na to, ze spełnianie układu (*) jest warunkiem koniecznym. Aby z niego poprawnie korzystać należy uzasadnić, że funkcja f istotnie osiąga wartość największą lub najmniejszą na zbiorze $M = \{(x, y) : F(x, y) = c\}$. Często korzystamy z twierdzenia Weierstrassa, które orzeka, że funkcja ciągła określona na zbiorze domkniętym i ograniczonym osiąga na tym zbiorze wartość najmniejszą i największą (tw. 4.17., str 63 skryptu). Domkniętość M jest automatyczna: zbiór opisany równością $F(x, y) = c$ (poziomica F odpowiadająca wartości c) jest zawsze domknięty dla F ciągłej. Zwykle pewnego wysiłku wymaga uzasadnienie ograniczoności.

Przykład.

Na zbiorze $E = \{(x, y) : x^4 + y^4 = 82\}$ określono funkcję f wzorem $f(x, y) = x - 27y + 1$. Uzasadnić, że funkcja f osiąga w tym zbiorze największą i najmniejszą wartość. Obliczyć te wartości.

Rozwiązanie. Wpierw uzasadnimy, że zbiór E jest ograniczony. Ponieważ $x^4 \geq 0$ oraz $y^4 \geq 0$, zatem dla punktów $(x, y) \in E$ mamy $|x| \leq \sqrt[4]{82}, |y| \leq \sqrt[4]{82}$, czyli E zawiera się kwadracie o środku w $(0, 0)$ i boku $2\sqrt[4]{82}$, a więc zawiera się również w kole domkniętym o środku $(0, 0)$ i promieniu $\sqrt[4]{82}$. Stąd E jest ograniczony. Funkcja opisana wzorem $x^4 + y^4$ jest ciągła na $\mathbb{R}^2$, zbiór E jest więc również domknięty. Na mocy twierdzenia Weierstrassa ciągła funkcja f osiąga na E zarówno wartość najmniejszą jak i największą. Wystarczy zatem wyznaczyć wszystkie punkty spełniające układ Lagrange'a (*) dla funkcji $f(x, y) = x - 27y + 1$ oraz $F(x, y) = x^4 + y^4$ przy $c = 82$, a następnie porównać wartości f w znalezionych punktach. Mamy $\nabla f(x, y) = (1, -27)$, $\nabla F(x, y) = (4x^3, 4y^3)$. Łatwo sprawdzić, że $\nabla F(x, y) \neq (0, 0)$ na E. Układ Lagrange'a to:

$$\begin{cases} (1, -27) = & \lambda(4x^3, 4y^3) \\ x^4 + y^4 = & 82 \end{cases} \quad \text{lub równoważnie:} \quad \begin{cases} 1 = & \lambda 4x^3 \\ -27 = & \lambda 4y^3 \\ x^4 + y^4 = & 82 \end{cases}$$

Nie może zachodzić $x = 0$, zatem z pierwszego równania $\lambda = \frac{1}{4x^3}$. Po wstawieniu do drugiego równania mamy $-27 = \frac{y^3}{x^3}$ czyli $y = -3x$. Podstawiając do ostatniego równania układu otrzymujemy: $x^4 + 81x^4 = 82$ zatem $82x^4 = 82$, skąd $x = \pm 1$. Mamy więc dwa punkty podejrzane o ekstremum warunkowe (tzn.ekstremum na podzbiorze opisanym równaniem): $P_1 = (1, -3)$ oraz $P_2 = (-1, 3)$ i wartości f w tych punktach $f(P_1) = 83$ oraz $f(P_2) = -80$. Stąd największa wartość f na E to 83, zaś najmniejsza to -80.

Przykład geometryczny

Na hiperboli H opisanej równaniem $x^2 - y^2 = 4$ znaleźć punkt najbliższy do punktu $(0, 2)$.

Rozwiązanie. Szukamy na H punktu (x, y), w którym odległość od $(0, 2)$ czyli funkcja $f(x, y) = \sqrt{x^2 + (y - 2)^2}$ osiąga wartość najmniejszą.Zwróćmy uwagę na to, że chociaż hiperbola jest zbiorem domkniętym, to jest nieograniczona, zatem nie możemy wnioskować istnienia punktu najbliższego bezpośrednio z tw. Weierstrassa. Do H należy punkt $(2, 0)$ będący w odległości $\sqrt{8}$ od $(0, 2)$. Zatem jeśli znajdziemy punkt najbliższy do $(0, 2)$ w zbiorze $H' = \{(x, y) : (x, y) \in H \wedge f(x, y) \leq \sqrt{8}\}$ to będzie on zarazem najbliższy do $(0, 2)$ spośród punktów całego H. Zauważmy, że H' jest już i domknięty i ograniczony czyli stosuje się do niego dla f tw. Weierstrassa, stąd istnieje w H punkt najbliższy do $(0, 2)$. Podobnie można uzasadnić ogólny

Wniosek: W każdym domkniętym niepustym podzbiorze $\mathbb{R}^2$ istnieje punkt najbliższy do ustalonego punktu $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Zwróćmy również uwagę na to, że zamiast minimalizować funkcję f można równoważnie minimalizować jej kwadrat czyli $g(x,y) = x^2 + (y-2)^2$, co jest nieco dogodniejsze rachunkowo. Mamy $\nabla F(x,y) = (2x, -2y)$, gdzie $F(x,y) = x^2 - y^2$ oraz $\nabla g(x,y) = (2x, 2y-4)$. Przy tym $\nabla F \neq (0,0)$ na H. Stąd układ równań Lagrange'a dla ekstremów warunkowych g na H to: $\begin{cases} (2x, 2y-4) = & \lambda(2x, -2y) \\ x^2 - y^2 = 4 \end{cases}$ Równoważnie:

$$\begin{cases} 2x = & \lambda 2x \\ 2y - 4 = & \lambda(-2y) \\ x^2 - y^2 = 4 \end{cases}.$$

Z pierwszego równania mamy I:$x = 0$ lub II:$\lambda = 1$. Przyjmując I w trzecim równaniu mamy sprzeczność. Podstawiając II do drugiego równania otrzymujemy $y = 1$. Podstawiając tę wartość y do trzeciego równania mamy $x = \pm\sqrt{5}$. Stąd otrzymujemy dwa podejrzane punkty: $P_1 = (\sqrt{5}, 1)$ i $P_2 = (-\sqrt{5}, 1)$ i wartości $g(P_1) = g(P_2) = 6$. W obu tych punktach odległość do $(0,2)$ jest najmniejsza i wynosi $\sqrt{6}$.