Kolokwium z matematyki

16 kwietnia 2010

kod 1101011.

1. Zadano funkcję $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ wzorem $f(x,y) = x^3y^2+y\ln(x+2y+1)+x+y$. a)Znaleźć kierunek najszybszego wzrostu f w punkcie $P = (2,-1)$ oraz wyznaczyć tempo tego wzrostu w P.

b) Znaleźć równanie płaszczyzny stycznej do wykresu f w punkcie $(2,-1,9)$

2. Na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ określono $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ wzorem $f(x,y) = y^3 + x^2 + 4y^2 + 4xy + 2x + y$. Proszę znaleźć punkty krytyczne f (tzn. te punkty $\mathbb{R}^3$, w których zeruje się gradient f), obliczyć macierz drugich pochodnych

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}.$$

Określić które z punktów krytycznych funkcji f są punktami ekstremum lokalnego i jakiego typu.

3. Zadany jest układ równań:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = t \\ 4x_1 + 7x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 1 \end{cases}$$

gdzie parametr $t \in \mathbb{R}$.

a) Proszę zbadać metodą macierzową dla jakich wartości $t \in \mathbb{R}$ układ ten jest niesprzeczny

b) Proszę znaleźć zbiór rozwiązań tego układu metodą macierzową, dla tych wartości t, dla których układ jest niesprzeczny.

4. Zadana jest macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 2 & 1 & -1 \\ 5 & -5 & 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Wybrać spośród kolumn macierzy A bazę przestrzeni $R(A)$ rozpiętej na kolumnach A. Jaki jest rząd macierzy A?

b) Znaleźć bazę przestrzeni $N(A) \subset \mathbb{R}^5$ opisanej równaniem $A[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]^\top = [0,0,0]^\top$.

5. Zadane są macierze $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1/7 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix}$. Wykonać obliczenia:

a) $BB^\top - 5C^\top$

b) $ABB^\top DDBB^\top$