A

Zadanie 1.

a) Proszę podać wzór Taylora z resztą w postaci Lagrange'a, oraz założenia przy których można go stosować.

b) Proszę podać wielomian Taylora funkcji $f(x) = \ln(1 + 2x)$ stopnia 2 w otoczeniu punktu $x_0 = 0$. Proszę oszacować resztę w przedziale $(-0,01; 0,01)$. Rozwiązanie. a) Jeśli funkcja $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ ma pochodne do rzędu $n + 1$ włącznie to $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2} + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$, gdzie c leży pomiędzy 0 i x. b) Mamy $f'(x) = \frac{2}{1+2x}, f''(x) = \frac{-4}{(1+2x)^2}, f'''(x) = \frac{16}{(1+2x)^3}$. Zatem z a) otrzymujemy $f(x) = 0+2x+((-4)/2)x^2+ (1/3!)\frac{16}{(1+2c)^3}x^3$. Czyli wielomian Taylora 2 stopnia ma postać $2x - 2x^2$. Resztę możemy oszacować $|R(x)| = |\frac{8}{3(1+2c)^3}x^3| \leq 8/(3 \cdot 0,98^3)(10^{-2})^3 = 8/(3 \cdot 0,98^3)10^{-6}$ (bo $c \leq 0,02$). Stąd błąd przybliżenia wielomianem nie przekracza $10^{-5} = 0,00001$.

Zadanie 2. Proszę obliczyć całkę $\int_1^2 x^5 \ln^2 x dx$. Policzymy najpierw całkę nieoznaczoną. Zastosujemy całkowanie przez części, przyjmując $f(x) = x^5$, czyli pierwotna f to $F(x) = 1/6x^6$, zaś $g(x) = \ln^2 x$, czyli $g'(x) = 2(\ln x)/x$ Zatem $\int x^5 \ln^2 x dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx = 1/6x^6 \ln^2 x - 1/3 \int x^5 \ln x dx$. Całkę po prawej stronie obliczymy znów przez części przyjmując $f_1(x) = x^5$, $F_1(x) = 1/6x^6$, $g_1(x) = \ln x$, $g_1'(x) = 1/x$. Czyli $\int x^5 \ln x dx = 1/6x^6 \ln x - 1/6 \int x^5 dx = 1/6x^6 \ln x - 1/36x^6 + c$. Stąd początkowa całka oznaczona wynosi $1/6x^6 \ln^2 x - 1/18x^6 \ln x + 1/108x^6|_1^2 = 32/3(\ln 2)^2 - 128/3 \ln 2 + 16/27 - 1/108$. **Uwaga:** Podobnie można liczyć całki funkcji postaci $x^a \ln^k x$ ($a \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \ldots$) stosując k krotne całkowanie przez części (a także postaci $x^a \arctan x$).

Zadanie 3. Proszę wyznaczyć całkę $\int \frac{\cos(3\ln^2 x+5)\ln x}{x}dx$. Całkę obliczamy stosując nową zmienną $u = 3\ln^2 x + 5$, czyli $du = 6\ln x/x$. Stąd szukana całka to $\int \cos u du/6 = 1/6 \sin u + c = 1/6 \sin(3\ln^2 x + 5) + c$ **Zadanie 3'.** Proszę obliczyć całkę nieoznaczoną $\int x^2 \sin(3x)dx$. Tego typu całki (iloczyn wielomianu przez funkcję trygonometryczną lub przez funkcję wykładniczą) całkujemy kilkakrotnie przez części, tak by wielomian był czynnikiem różniczkowanym: $\int x^2 \sin(3x)dx = -1/3\cos(3x)x^2 - \int -1/3\cos(3x)2xdx = -1/3\cos(3x)x^2 + 2/3 \int \cos(3x)xdx = -1/3\cos(3x)x^2 + 2/3(1/3\sin(3x)x) - \int 1/3\sin(3x)dx = -1/3\cos(3x)x^2 + 2/9\sin(3x)x + 2/27\cos(3x) + c$

Zadanie 4. Obliczyć objętość bryły ograniczonej w $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ powierzchnią powstałą przez obrót linii $x = 1 + e^z, y = 0$ wokół osi Z oraz płaszczyznami $z = 0$ i $z = 1$. Stosujemy wzór na objętość bryły obrotowej: $V = \pi \int_{z_0}^{z_1} f^2(z)dz$. Tutaj $z_0 = 0, z_1 = 1, f(z) = 1 + e^z$. Czyli

$V = \pi\int_0^1 (1+e^z)^2 dz = \pi\int_0^1 (1+e^{2z}+2e^z)dz = \pi(z+e^{2z}/2+2e^z|_0^1) = \pi(1+e^2/2+2e-1/2-2) = \pi(e^2/2+2e-1\frac{1}{2})$

Zadanie 5. Obliczyć pole ograniczone parabolą $y = x^4$ i jej sieczną przechodzącą przez punkty $(0,0)$ i $(2,16)$.

Odp. Równanie siecznej jest $y = 8x$. Zatem szukane pole to $\int_0^2 8x - x^4 dx = 8x^2/2 - \frac{1}{5}x^5|_0^2 = 16 - 32/5 - 0 = 9\frac{3}{5}$

Zadanie 6. Zbadać, czy któryś z poniższych szeregów jest zbieżny. W przypadku szeregu zbieżnego obliczyć jego sumę.

a) $A : \sum_{n=1}^{\infty}(-12)\cdot(-1,0000001)^{n-1}$

b) $B : \sum_{n=1}^{\infty} 14\cdot(-3/4)^{n-1}$

Odp. Oba szeregi to szeregi geometryczne. W przypadku szeregu A iloraz tego szeregu $q = -1,0000001$ i zachodzi $|q| = 1,0000001 \geq 1$ zatem szereg jest rozbieżny. W przypadku$B$ iloraz $q = -3/4$ i $|q| = 3/4 < 1$ zatem szereg jest zbieżny i jego suma (granica sum częściowych) wynosi $a_1/(1-q)$, gdzie a_1 oznacza pierwszy wyraz szeregu. Czyli $\sum_{n=1}^{\infty} 14\cdot(-3/4)^{n-1} = 14/(1-(-3/4)) = 14/(7/4) = 8$

Zadanie 7. Proszę obliczyć pochodną funkcji f zdefiniowanej przez $f(x) = \int_{x^2}^{x^3}\cos(2t)/t dt$. Skorzystamy ze wzoru Newtona - Leibniza: $(\int_a^x r(t)dt)' = r(x)$. Zatem, jeśli przyjmiemy $G(u) = \int_0^u \cos(2t)/t dt$ to $G'(u) = \cos(2u)/u$. Czyli $f'(x) = (G(x^3)-G(x^2))' = G'(x^3)3x^2 - G'(x^2)2x = (\cos(2x^3)/(x^3))3x^2 - (\cos(2x^2)/(x^2))2x = (3\cos(2x^3) - 2\cos(2x^2))/x$. Ogólnie, jeśli $S(x) = \int_{h(x)}^{k(x)} r(t)dt$ to $S'(x) = r(k(x))k'(x) - r(h(x))h'(x)$.