

1. Kilka całek.

24 marca 2017

Proponuję przećwiczenie kilku prostych całek, podobnych do tych, które pojawiają się na kolokwium.

1. Rozkład na sumę całek i korzystanie z prostych podstawień liniowych (wzór: jeśli $\int f(x)dx = F(x) + c$ to $\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + c$)

a) $\int \cos(3x + 5) + \frac{1}{5x-2} + \sqrt[3]{x^5}dx$ b) $\int \frac{2}{x^2-5x+6}dx$ c) $\int \frac{x^2}{8x^2+2}dx$

Odp. a) $\frac{1}{3} \sin(3x + 5) + \frac{1}{5} \ln |5x - 2| + \frac{3}{8}x^{8/3} + c$ b) $= \int \frac{2}{(x-2)(x-3)}dx = 2 \int \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}dx = 2(\ln |x - 3| - \ln |x - 2|) + c$, c) $= \int \frac{1}{8}(\frac{8x^2+2}{8x^2+2} - \frac{1}{(2x)^2+1})dx = \frac{1}{8}x + \frac{1}{16} \arctan(2x) + c$

2. Przykłady na całkowanie przez podstawienie i zamianę zmiennych:

a) $\int \frac{3x^2+3}{x^3+3x+5}dx$ b) $\int (\cos(3x - 1) + 5)^4 \sin(3x - 1)dx$, c) $\int \frac{\cos(\ln(x)+7)}{x}dx$
d) $\int e^{\sin x} \cos x dx$ e) $\int \sqrt[5]{3x^2 + 4x} dx$ f*) $\int \sin^5 x dx$

Wskazówki podstawień: a) $t = x^3 + 3x + 5$, b) $t = \cos(3x - 1) + 5$
c) $t = \ln x + 7$ d) $t = \sin x$ e) $t = 3x^2 + 4$, f*) przedstawiamy $\sin^5 x = \sin^4 x \sin x = (1 - \cos^2 x)^2 \sin x$ i stosujemy podstawienie $t = \cos x$

3. Całkowanie przez części (wzór $\int f(x)g(x)dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)dx$, gdzie $F'(x) = f(x)$)

a) $\int x \ln(x+2)dx$ b) $\int \ln(x^2+1)dx$, c) $\int e^{3x+2} \cos(2x+3)dx$ d) $\int \cos(\ln x)dx$,
e) $\int \sqrt[6]{x} \ln^2 x dx$ f) $\int x^2 e^{3x} dx$ g) $\int x^2 \sin(3x + 4)dx$.

Wskazówki: a) $f(x) = x, g(x) = \ln(x + 2)$ czyli $F(x) = x^2/2$, b) $f(x) = 1, g(x) = \ln(x^2 + 1)$ czyli $F(x) = x$, c) dwukrotnie stosujemy całkowanie przez części przyjmując $f(x) = e^{3x+2}$ czyli $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x+2}$ i powracając do tej samej całki, d) podobnie jak c) przyjmując $f(x) = 1, F(x) = x$, e) całkujemy dwukrotnie przez części przyjmując $\ln^2 x$ i $\ln x$ jako $g(x)$, f) dwukrotnie stosujemy całkowanie przez części, przyjmując x^2 i x jako $g(x)$, g) podobnie jak f).