2 kolokwium z analizy

5 stycznia 2015

1101111

Zadanie 1.

Proszę podać wielomian Taylora funkcji $f(x) = 2+\cos(\pi-3x)+x$ stopnia 2 w otoczeniu punktu $x_0 = 0$ oraz odpowiednią resztę w postaci Lagrange'a.

Zadanie 2. Proszę wyznaczyć całkę $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{3\sin x+2}}dx$.

Zadanie 3. Proszę obliczyć całkę $\int xe^{3x-2}dx$.

Zadanie 4. Obliczyć pole powierzchni ograniczonej wykresami funkcji $y = f(x) = x^2$ oraz funkcji $y = g(x) = 32\sqrt[3]{x}$

Zadanie 5. Obliczyć objętość bryły ograniczonej w $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ powierzchnią powstałą przez obrót linii $z = f(x) = 1 + \frac{1}{x}, y = 0$ wokół osi X oraz płaszczyznami $x = 1$ i $x = 2$.

Zadanie 6. Zbadać, czy któryś z poniższych szeregów jest zbieżny. W przypadku szeregu zbieżnego obliczyć jego sumę.

a) $A : \sum_{n=1}^{\infty}(-100) \cdot (0,995)^{n-1}$

b) $B : \sum_{n=1}^{\infty} 0,0001 \cdot (-1000/999)^{n-1}$

Zadanie 7. Proszę obliczyć pochodną funkcji G zdefiniowanej przez $G(x) = \int_x^{x^2} \sin t/tdt$.

Odpowiedzi

1. Mamy $f(x) = 2+\cos(\pi-3x)+x$, $f' = 3\sin(\pi-3x)+1$, $f'' = -9\cos(\pi-3x)$, $f''' = -27\sin(\pi - 3x)$. Zatem wielomian Taylora 2 stopnia w otoczeniu $x_0 = 0$ (czyli wielomian Maclaurina) to $w(x) = f(0)+f'(0)x+(f''(0)/2)x^2 = 1 + x + (9/2)x^2$, zaś reszta to $R(x) = (f'''(c)/3!)x^3 = (-9/2)\sin(\pi - 3c)x^3$, gdzie c jest pewną liczbą pomiędzy 0 a x.

2. Podstawiamy $u = 3\sin x+2$, czyli $du = 3\cos xdx$ skąd obliczana całka to $\frac{1}{3}\int u^{-1/3}du = \frac{1}{3}(3/2)u^{2/3} + c = (1/2)(3\sin x + 2)^{2/3} + c$

3. Całkujemy przez części przyjmując $f(x) = e^{3x-2}, F(x) = (1/3)e^{3x-2}$, $g(x) = x, g'(x) = 1$. Czyli obliczana całka to $(1/3)xe^{3x-2} - \int(1/3)e^{3x-2}dx = (1/3)xe^{3x-2} - (1/9)e^{3x-2} + c$

4. Rozwiązując równanie $f(x) = g(x)$ otrzymujemy, że wykresy przecinają się dla $x_0 = 0$ i $x_1 = 8$. Stąd szukana powierzchnia to $\int_{x_0}^{x_1} g(x) - f(x)dx = \int_0^8 32x^{1/3} - x^2 dx = 24 \cdot 8^{4/3} - 8^3/3 = 2^8 \cdot 7/3$

5. Objętość to całka $\int_1^2 \pi(1 + 1/x)^2 dx = \pi \int_1^2 1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} dx = \pi(x + 2\ln|x| - 1/x)|_1^2 = \pi(1\frac{1}{2} + 2\ln 2)$

6. Szereg B jest rozbieżny, bo moduł jego ilorazu $|q| = |-1000/999| = 1000/999 > 1$. Szereg A jest zbieżny i $\sum_{n=1}^{\infty}(-100)\cdot(0,995)^{n-1} = -100/(1-0,995) = -20000$.

7. Korzystamy z wyprowadzonego wzoru dla pochodnej funkcji $G(x) = \int_{r(x)}^{q(x)} f(t)dt$, czyli $G'(x) = f(q(x))q'(x) - f(r(x))r'(x)$. Otrzymujemy $G'(x) = (2\sin x^2)/x - (\sin x)/x$