

Formy kwadratowe

Mirosław Sobolewski

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW

wykład z algebry liniowej
Warszawa, styczeń 2009

Definicja

Niech V, W, U będą przestrzeniami liniowymi (nad \mathbb{R}).

Przekształcenie $\Phi : V \times W \rightarrow U$ nazwiemy przekształceniem **dwuliniowym** jeśli spełnia poniższe warunki:

(i) $\Phi(v + v', w) = \Phi(v, w) + \Phi(v', w)$, dla dowolnych $v, v' \in V, w \in W$

(ii) $\Phi(\alpha v, w) = \alpha \Phi(v, w)$, dla dowolnych $\alpha \in \mathbb{R}, v \in V, w \in W$

(i') $\Phi(v, w + w') = \Phi(v, w) + \Phi(v, w')$, dla dowolnych $v, v' \in V, w, w' \in W$

(ii') $\Phi(v, \alpha w) = \alpha \Phi(v, w)$, dla dowolnych $\alpha \in \mathbb{R}, v \in V, w \in W$

Uwaga: Można powiedzieć, że Φ jest dwuliniowe jeśli jest liniowe ze względu na każdy z argumentów przy ustaleniu wartości drugiego z argumentów.

Przykład

- (a) Niech $V = W = U = \mathbb{R}$. Wówczas przekształcenie $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zdefiniowane przez $\Phi(\alpha, \beta) = \alpha\beta$ jest dwuliniowe.
- (b) Niech $V = W = U = \mathcal{F}(\mathbb{R})$ będzie przestrzenią wszystkich funkcji rzeczywistych. Wtedy wzór $\Phi(f, g) = f \cdot g$, dla $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ opisuje przekształcenie dwuliniowe.
- (c) Niech $V = M_{k \times l}(\mathbb{R})$, $W = M_{l \times m}(\mathbb{R})$, $U = M_{k \times m}(\mathbb{R})$, Wówczas $\Phi : V \times W \rightarrow U$ określone przez $\Phi(M, N) = M \cdot N$, dla $M \in M_{k \times l}(\mathbb{R})$, $N \in M_{l \times m}(\mathbb{R})$ jest dwuliniowe.

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową. Dowolne przekształcenie dwuliniowe $V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ nazwiemy **formą** dwuliniową. Jeśli Φ spełnia $\Phi(v, w) = \Phi(w, v)$ dla dowolnych $v, w \in V$, to powiemy, że forma Φ jest **symetryczna**.

Przykład

(a) Niech $V = \mathbb{R}^n$. Wówczas przyporządkowanie zadane przez iloczyn skalarny $(v, w) \mapsto v \circ w$ jest formą dwuliniową symetryczną.

(b) Niech $V = \mathbb{R}^2$. Zdefiniujmy $\Phi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ przez

$\Phi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 - x_2y_1$. Φ jest formą dwuliniową (niesymetryczną). Ogólnie : dowolną formę dwuliniową Ψ na \mathbb{R}^n

można zapisać w postaci $\Psi((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) =$

$$a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + \dots + a_{1n}x_1y_n + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2 + \dots + a_{2n}x_2y_n + \dots + a_{n1}x_ny_1 + a_{n2}x_ny_2 + \dots + a_{nn}x_ny_n = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}x_iy_j,$$

gdzie $a_{ij} \in \mathbb{R}$ dla $1 \leq i, j \leq n$ są ustalonymi współczynnikami. Także każdy taki wzór opisuje pewną formę dwuliniową, przy czym forma ta jest symetryczna $\Leftrightarrow a_{ij} = a_{ji}$ dla $1 \leq i, j \leq n$.

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową, $\Phi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ będzie formą dwuliniową na V , zaś $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ pewną bazą w V . Wówczas macierz $A = [a_{ij}] \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ zdefiniowaną przez $a_{ij} = \Phi(v_i, v_j)$ dla $1 \leq i, j \leq n$ nazywamy **macierzą formy dwuliniowej** Φ w bazie \mathcal{B}

Twierdzenie

Niech $\Phi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ będzie formą dwuliniową określoną na przestrzeni liniowej V , zaś macierz $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ macierzą Φ w pewnej bazie $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ przestrzeni V . Wówczas:

- (i) Macierz A jest symetryczna \Leftrightarrow forma Φ jest symetryczna
- (ii) jeśli $v_{\mathcal{B}}$ oznacza kolumnę współrzędnych wektora $v \in V$ w bazie \mathcal{B} to $\Phi(v, w) = v_{\mathcal{B}}^T A w_{\mathcal{B}}$ dla $v, w \in V$.

Przykład

Niech forma dwuliniowa Φ na \mathbb{R}^2 będzie zadana wzorem

$\Phi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 - x_2y_1$. Niech $\mathcal{B} = ((1, 1), (1, 2)) = (v_1, v_2)$

– baza \mathbb{R}^2 . Macierzą Φ w bazie standardowej jest $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Ogólnie macierzą formy na \mathbb{R}^n postaci $\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}x_iy_j$ jest w bazie standardowej macierz $[a_{ij}] \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$.

Ponieważ $\Phi(v_1, v_1) = 1$, $\Phi(v_1, v_2) = 1$, $\Phi(v_2, v_1) = 0$, $\Phi(v_2, v_2) = 0$,

zatem macierzą Φ w bazie \mathcal{B} jest $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Niech teraz

$w = 3v_1 + 2v_2 = (5, 7)$, zaś $u = v_1 - v_2 = (0, -1)$, czyli $w_{\mathcal{B}} = [3, 2]^T$,

$u_{\mathcal{B}} = [1, -1]^T$. Zgodnie z twierdzeniem

$$\Phi(w, u) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$$

Stwierdzenie (1)

Niech Φ oznacza pewną formę na \mathbb{R}^n . Niech $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$, będzie bazą w \mathbb{R}^n . Wówczas każde dwa z poniższych warunków implikują trzeci:

- (i) Macierzą Φ w bazie \mathcal{B} jest macierz diagonalna, w której na przekątnej są kolejno liczby $\|v_1\|^2, \|v_2\|^2, \dots, \|v_n\|^2$
- (ii) Baza \mathcal{B} jest ortogonalna
- (iii) $\Phi(v, w) = v \circ w$ dla $v, w \in \mathbb{R}^n$

Stwierdzenie (2)

Niech Φ oznacza pewną formę na \mathbb{R}^n . Niech $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$, będzie bazą w \mathbb{R}^n . Wówczas każde dwa z poniższych warunków implikują trzeci:

- (i) Macierzą Φ w bazie \mathcal{B} jest I_n
- (ii) Baza \mathcal{B} jest ortonormalna
- (iii) $\Phi(v, w) = v \circ w$ dla $v, w \in \mathbb{R}^n$

Zamiana bazy a macierz formy

Twierdzenie

Niech V będzie przestrzenią liniową, zaś $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$ oraz $\mathcal{B} = (v'_1, \dots, v'_n)$ bazami przestrzeni V . Niech $\Phi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ będzie forma dwuliniową na V . Oznaczmy przez A macierz Φ w bazie \mathcal{A} , zaś przez B macierz Φ w bazie \mathcal{B} oraz niech $M = M(\text{id})_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$ będzie macierzą zamiany współrzędnych. Wówczas $B = M^T A M$.

Uwaga: Chociaż zarówno endomorfizmy na przestrzeni n -wymiarowej, jak i formy dwuliniowe reprezentowane są przez podobne obiekty arytmetyczne – macierze kwadratowe $n \times n$ to macierze te inaczej zmieniają się przy przejściu od pewnej bazy do innej bazy.

Przykład

Niech $V = \mathbb{R}^2$. Zdefiniujmy $\Phi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ przez $\Phi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 - x_2y_1$. Niech $\mathcal{B} = ((1, 1), (1, 2)) = (v_1, v_2)$ – baza \mathbb{R}^2 . Niech \mathcal{A} oznacza bazę standardową, A – macierz Φ w \mathcal{A} , B – macierz Φ w \mathcal{B} . Niech $M = M(id)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ oznacza macierz zamiany współrzędnych. Mamy

$$M^T A M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = B \text{ zgodnie z bezpośrednim obliczeniem.}$$

Formy kwadratowe

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową. Powiemy, że funkcja $Q : V \rightarrow \mathbb{R}$ jest **formą kwadratową** na V , jeśli istnieje taka forma dwuliniowa symetryczna Φ na V , że $Q(v) = \Phi(v, v)$. Formę Φ będziemy wówczas nazywać formą dwuliniową symetryczną **odpowiadającą** formie kwadratowej Q .

Twierdzenie

Niech Q będzie formą kwadratową na przestrzeni liniowej V i niech $\Phi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ będzie odpowiadającą Q formą dwuliniową symetryczną. Wówczas $\Phi(v, w) = \frac{1}{2}(Q(v+w) - Q(v) - Q(w))$. Zatem każdej formie kwadratowej odpowiada tylko jedna forma dwuliniowa symetryczna

Przykład

Niech funkcja $Q : V \rightarrow \mathbb{R}$ na $V = \mathbb{R}^2$, $Q((x_1, x_2)) = 4x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$.

Funkcja Q jest formą kwadratową na V . Odpowiadającą jej formą dwuliniową symetryczną jest

$\Phi((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 4x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2$. Ogólnie: dowolny wielomian jednorodny (tzn. taki, którego wszystkie jednomiany są tego samego stopnia) stopnia 2 określa pewną formę kwadratową w \mathbb{R}^n

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową, zaś \mathcal{B} bazą V . Niech Q będzie formą kwadratową na V . **Macierzą Q** w bazie \mathcal{B} nazwiemy macierz w tejże bazie formy dwuliniowej symetrycznej odpowiadającej Q

Przykład

Macierzą $Q((x_1, x_2)) = 4x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$ jest w bazie standardowej w

$$\mathbb{R}^2 \text{ macierz } \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Definicja

Niech V będzie przestrzenią liniową, zaś $Q : V \rightarrow \mathbb{R}$ – formą kwadratową na V . Powiemy, że forma Q jest **dodatnio(ujemnie) określona**, jeśli $Q(v) > 0$ (< 0) dla każdego niezerowego wektora $v \in V$.

Przykład

(a) W \mathbb{R}^n forma kwadratowa zdefiniowana $Q(v) = \|v\|^2 = v \circ v$ jest dodatnio określona, zaś forma Q' zdefiniowana $Q'(v) = -Q(v)$ jest ujemnie określona.

(b) Forma Q na \mathbb{R}^2 określona $Q((x_1, x_2)) = 4x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$ jest dodatnio określona, gdyż $Q((x_1, x_2)) = 3x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 > 0$ dla $x_1 \neq 0$ lub $x_2 \neq 0$.

Twierdzenie (Kryterium Sylwestera)

Niech Q będzie formą kwadratową na przestrzeni liniowej V , $\dim V = n$ zaś $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ jej macierzą w pewnej bazie przestrzeni V . Niech W_i dla $i = 1, \dots, n$ oznacza wyznacznik macierzy $i \times i$ powstałej z A przez wykreślenie ostatnich $n - i$ wierszy i kolumn. Wtedy:
Forma Q jest dodatnio określona $\Leftrightarrow W_i > 0$ dla $i = 1, \dots, n$.

Uwaga Ponieważ forma Q jest ujemnie określona $\Leftrightarrow -Q$ jest dodatnio określona, kryterium to pozwala rozstrzygać również ujemną określoność formy. Stąd:

Twierdzenie (2)

Niech Q będzie formą kwadratową na przestrzeni liniowej V , $\dim V = n$ zaś $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ jej macierzą w pewnej bazie przestrzeni V . Niech W_i dla $i = 1, \dots, n$ oznacza wyznacznik macierzy $i \times i$ powstałej z A przez wykreślenie ostatnich $n - i$ wierszy i kolumn. Wtedy:
Forma Q jest ujemnie określona $\Leftrightarrow W_i < 0$ dla i nieparzystych oraz $W_i > 0$ dla parzystych i , gdzie $i = 1, \dots, n$.

Przykład

a) Niech $Q((x_1, x_2)) = 4x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$ forma kwadratowa na \mathbb{R}^2 . jej macierzą w bazie standardowej jest $\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, zatem $W_1 = 4 > 0$,

$W_2 = \det \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 5 > 0$, czyli Q jest dodatnio określona, na mocy kryterium Sylwestera.

b) Niech $Q((x_1, x_2, x_3)) = -x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 + 2x_2x_3 - 2x_3^2$ będzie formą kwadratową określoną na \mathbb{R}^3 . Jej macierzą w bazie

standardowej jest $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$. Mamy $W_1 = -1 < 0$,

$W_2 = \det \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = 1 > 0$,

$W_3 = \det \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = -4 + 1 + 2 = -1 < 0$ zatem Q jest

ujemnie określona (tw. 2)

Przykład

c) Niech $Q((x_1, x_2)) = -x_1^2 + 6x_1x_2 - x_2^2$ będzie formą kwadratową na \mathbb{R}^2 . Jej macierzą w bazie standardowej jest $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$. Mamy:

$W_1 = -1 < 0$, $W_2 = \det \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = 1 - 9 = -8 < 0$. Zatem Q nie jest ani dodatnio określona, ani ujemnie określona. Rzeczywiście $Q((1, 0)) = -1 < 0$, zaś $Q((1, 1)) = 4 > 0$.