1. W $\mathbb{R}^2$ zadano bazy $\mathcal{A} = \{(1,2),(0,1)\}$, $\mathcal{B} = \{(3,1),(1,0)\}$. Niech $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ będzie takim przekształceniem liniowym, że $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

a) Niech wektor $v \in \mathbb{R}^2$ ma w bazie $\mathcal{A}$ współrzędne 2,3. Jakie są współrzędne w bazie $\mathcal{B}$ wektora $\phi(v)$? Jaki to wektor $\phi(v)$?

b) Niech $w = (2,5)$. Jakie są współrzędne w bazie $\mathcal{B}$ wektora $\phi(w)$? Jaki to wektor $\phi(w)$?

c) $\mathcal{C}$ jest pewną bazą w $\mathbb{R}^3$. Zadano przekształcenie liniowe $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ macierzą $M(\psi)_{st}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Jaka jest macierz złożenia $M(\psi \circ \phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}}$?

Odp. a) Korzystamy ze wzoru $(\phi(v))_{\mathcal{B}} = M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} v_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 18 \end{bmatrix}$. Czyli współrzędne $\phi(v)$ w bazie $\mathcal{B}$ to 8 i 18. Sam wektor $\phi(v)$ to $8(3,1) + 18(1,0) = (42,8)$

b) Wektor w możemy zapisać jako następującą kombinację wektorów bazy $\mathcal{A}$: $w = (2,5) = 2(1,2) + 1(0,1)$. Podobnie jak poprzednio możemy więc obliczyć kolumnę współrzędnych $\phi(w)$ w bazie $\mathcal{B}$: $(\phi(w))_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \end{bmatrix}$. Czyli poszukiwane współrzędne to 4 i 10, zaś wektor $\phi(w) = 4(3,1) + 10(1,0) = (22,4)$.

Aby poprawnie obliczyć macierz złożenia musimy dopasować macierze czynników tego złożenia. Np. możemy przedstawić macierz $M(\phi)_{\mathcal{A}}^{st} = M(id)_{\mathcal{B}}^{st} \cdot M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$. Stąd $M(\psi \circ \phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}} = M(\psi)_{st}^{\mathcal{C}} \cdot M(\phi)_{\mathcal{A}}^{st} =$
$M(\psi)_{st}^{\mathcal{C}} \cdot M(id)_{\mathcal{B}}^{st} \cdot M(\phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$. Macierz zamiany współrzędnych $M(id)_{\mathcal{B}}^{st} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Stąd $M(\psi \circ \phi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 14 \\ 1 & 2 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$

2. Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, zaś

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 29 & 33 & 14 \\ 0 & 3 & 31 & 47 \\ 0 & 0 & -1 & 41 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Obliczyć $\det A$ oraz obliczyć

$\det((B^\top \cdot B)^2)$. Odp. Wiemy, że przekształcenia elementarne macierzy polegające na dodaniu do wiersza innego wiersza pomnożonego przez liczbę nie zmieniają wartości wyznacznika, zaś przekształcenie polegające na zamianie wierszy macierzy zmienia wartość wyznacznika na liczbę przeciwną (czyli zmienia znak wyznacznika). Zastosujmy do macierzy A przekształcenia $w_3 - 2w_1 - w_2$ oraz $w_4 - w_1 - 2w_2$ (możemy naraz wykonać kilka operacji, o ile nie zmieniamy w ich trakcie wierszy, których wielokrotności dodajemy). Mamy $\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & -8 & -11 \end{bmatrix}$. Macierz po prawej stronie ma strukturę blokową $\begin{bmatrix} B & C \\ \mathbf{0} & D \end{bmatrix}$, gdzie $\mathbf{0}$ oznacza blok złożony z zer. Wyznacznik takiej macierzy to $\det B \det D$, zatem $\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} -8 & -8 \\ -8 & -11 \end{bmatrix} = 3 \cdot 24 = 72$. (można też sprowadzić macierz A przekształceniami wierszowymi do postaci trójkątnej). Wyznacznik macierzy B możemy obliczyć, korzystając z następujących ogólnych zależności: $\det(XY) = \det X \det Y$, $\det X^n = (\det X)^n$, $\det X^\top = \det X$. Stąd $\det((B^\top \cdot B)^2) = (\det B \cdot \det B)^2 = \det B^4$. Macierz B jest górnie trójkątna (elementy poniżej przekątnej są 0), czyli jej wyznacznik to iloczyn elementów na przekątnej. Mamy więc $\det((B^\top \cdot B)^2) = (1 \cdot 3 \cdot (-1) \cdot 1)^4 = (-3)^4 = 81$.