Kod 1101101

1.

a) Proszę określić dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$ poniższy układ jest niesprzeczny:

$$\begin{cases} 2x_1 & +2x_2 & +x_3 & -x_4 & = 2 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & +2x_4 & = t \\ 4x_1 & +4x_2 & +3x_3 & +3x_4 & = 3 \end{cases}$$

b) Podać rozwiązanie ogólne powyższego układu dla znalezionych wartości $t \in \mathbb{R}$. Opisać zbiór rozwiązań jako podzbiór $\mathbb{R}^4$.

2. Oznaczmy przez $v_1 = (1,1,1,-1), v_2 = (-1,0,2,1), v_3 = (0,1,3,0), v_4 = (3,2,0,-3)$ wektory przestrzeni $\mathbb{R}^4$. Niech $V = lin(v_1, v_2, v_3, v_4)$.

a) Wybrać spośród wektorów $v_1, v_2, v_3, v_4$ bazę przestrzeni $V$

b) zapisać wektory $v_1, v_2, v_3, v_4$ jako kombinacje liniowe wybranych w a) wektorów bazowych

c) Podać układ równań liniowych jednorodnych opisujących $V$ jako podzbiór $\mathbb{R}^4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$

3. Zadano w $\mathbb{R}^5$ podprzestrzeń $W$ układem równań liniowych jednorodnych:

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & -x_3 & +x_4 & +x_5 & = 0 \\ x_1 & & +2x_3 & -x_4 & -x_5 & = 0 \end{cases}$$

a) Znaleźć pewną bazę przestrzeni $W$

b) określić dla jakich wartości $s \in \mathbb{R}$ podprzestrzeń $W$ zawiera podprzestrzeń $Z_s = lin((0,1,1,s,1)) \subset \mathbb{R}^5$

c) Uzupełnić znalezioną w a) bazę podprzestrzeni $W$ do bazy $\mathbb{R}^5$.

**Odpowiedzi**

1a) Układ jest niesprzeczny dla $t = \frac{1}{2}$ b) dla $t = \frac{1}{2}$ otrzymujemy rozwiązanie ogólne z dwoma parametrami, przy standardowej metodzie rozwiązania są nimi $x_2$ i $x_4$: $x_1 = 1\frac{1}{2} - x_2 + 3x_4$, $x_3 = -1 - 5x_4$ czyli zbiór rozwiązań to $\{(1\frac{1}{2} - x_2 + 3x_4, x_2, -1 - 5x_4, x_4) : x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}$

2 a) jako bazę można przyjąć układ złożony z $v_1$ i $v_2$ b) $v_3 = v_1 + v_2$, $v_4 = 2v_1 - v_2$ c) musi to być układ zawierający 2 liniowo niezależne równania np. stosując standardową metodę dostajemy układ z równań $2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$ i $x_1 + x_4 = 0$

3.a) Jako bazę $W$ można wziąć układ trzech wektorów: $w_1 = (-2,-3,1,0,0), w_2 = (1,2,0,1,0), w_3 = (1,2,0,0,1)$ b) $W$ zawiera $Z_s \Leftrightarrow$ wektor $(0,1,1,s,1)$ spełnia układ opisujący $W$, czyli dla $s = 1$ c) układ $w_1, w_2, w_3$ można uzupełnić do bazy $\mathbb{R}^5$ np. wektorami $(1,0,0,0,0), (0,1,0,0,0)$