Z.1 a) Tworzymy macierz układu $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 1 & t^2 \end{bmatrix}$. Kolejnymi operacjami wierszowymi $w_1 \leftrightarrow w_2, w_2 - 2w_1, w_3 - 4w_1, w_3 - w_2$ sprowadzamy ją do postaci schodkowej (a nawet schodkowej zredukowanej) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t^2-4 \end{bmatrix}$.
Kryterium niesprzeczności układu jest następujące: po sprowadzeniu macierzy układu do postaci schodkowej nie może być elementu wiodącego w ostatniej kolumnie (kolumnie wyrazów wolnych). Zatem, w naszym przypadku układ jest niesprzeczny $\Leftrightarrow t^2 - 4 = 0$ czyli szukany zbiór wartości t to $\{-2, 2\}$.

b) dla $t = 2$ możemy skorzystać z uzyskanej macierzy w postaci schodkowej zredukowanej i sczytać odpowiedni układ równoważny $\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$, który przekształcimy do postaci rozwiązania ogólnego. Ponieważ wyrazy wiodące w macierzy w postaci schodkowej są w kolumnach nr. 1 i 2, zatem wybieramy x_1 i x_2 jako zmienne zależne:$\begin{cases} x_1 = 1 - x_3 - x_4 \\ x_2 = x_3 + 3x_4 \end{cases}$. Stąd zbiór rozwiązań można zapisać
$\{(1 - x_3 - x_4, x_3 + 3x_4, x_3, x_4) : x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$

Z2 a) Zastosujemy metodę sprowadzenia do postaci schodkowej macierzy, której kolumnami są zadane wektory czyli macierzy $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -1 & 5 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.
Po zastosowaniu operacji wierszowych $W_3 - w_1, w_4 + w_3$ a następnie $w_3 + w_4$ otrzymamy macierz w postaci schodkowej $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Ponieważ elementy wiodące znajdują się w kolumnach nr 1 i 3, zatem jako bazę V można wybrać układ złożony z wektorów $v_1 = (1, 0, 1, -1)$ i $v_3 = (1, 2, -1, -1)$. b) otrzymaną w części a) macierz w postaci schodkowej możemy sprowadzić operacjami $\frac{1}{2}w_2, w_1 - w_2$ do postaci schodkowej zredukowanej: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. W macierzy tej widzimy, że $k_2 = 2k_1$ oraz $k_4 = 3k_1 - 2k_3$, gdzie k_i oznacza kolumnę nr i. Oznacza to, że $v_2 = 2v_1$

oraz $v_3 = 3v_1 - 2v_3$, co łatwo sprawdzić bezpośrednio. Stąd w bazie $\{v_1, v_2\}$ współrzędne wektorów są następujące: v_1 ma współrzędne 1, 0; v_2 ma współrzędne 2, 0; v_3 ma współrzędne 0, 1; v_4 ma współrzędne 3, -2.

c) Szukamy czwórek współczynników $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ równań jednorodnych postaci $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0$, takich, by równania te były spełniane przez wektory v_1, v_2, v_3, v_4. Ponieważ wiemy z a) że v_1, v_2 tworzą bazę V zatem wystarczy ograniczyć się do tych wektorów. Stąd mamy układ dwóch równań na współczynniki: $\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 - \alpha_4 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 = 0 \end{cases}$. Macierz tego układu to $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. Sprowadzamy ją operacjami $w_2 - w_1, \frac{1}{2}w_2$, do postaci schodkowej zredukowanej $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, z której odczytujemy rozwiązanie ogólne: $\alpha_1 = -\alpha_3 + \alpha_4$, $\alpha_2 = \alpha_3$. Ponieważ α_3, α_4 pełnią rolę parametrów zatem przyjmując wpierw $\alpha_3 = 1, \alpha_4 = 0$, a następnie $\alpha_3 = 0, \alpha_4 = 1$ otrzymujemy dwa bazowe zestawy współczynników $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$: $(-1, 1, 1, 0)$ oraz $(1, 0, 0, 1)$. Stąd V można opisać układem równań: $\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \end{cases}$ (dla upewnienia się sprawdzamy, że istotnie wektory v_1, v_2, v_3, v_4 spełniają ten układ)

Z3. a) Tworzymy macierz układu $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, którą operacjami $w_2 - w_1, (-1)w_2, w_1 - w_2$ sprowadzamy do postaci schodkowej zredukowanej $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, z której mamy rozwiązanie ogólne $\begin{cases} x_1 = -2x_3 + x_4 \\ x_2 = 3x_3 - 2x_4 \end{cases}$ Stąd mamy bazę W złożoną z dwóch wektorów $w_1 = (-2, 3, 1, 0)$ oraz $w_2 = (1, -2, 0, 1)$ czyli $dimW = 2$. b) ponieważ w części a) otrzymaliśmy, że $W = lin(w_1, w_2) = lin((-2, 3, 1, 0), (1, -2, 0, 1))$ zatem W będzie się zawierała w $Z_s \Leftrightarrow w_1 \in Z_s$ oraz $w_2 \in Z_s$. Czyli oba wektory muszą spełniać równanie opisujące Z_s. Stąd musi zachodzić $s(-2) + 2 \cdot 3 = 0$ oraz $s \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + 1 = 0$. Rozwiązując ten układ równości otrzymujemy $s = 3$: tylko dla tej wartości s zachodzi $W \subset Z_s$.

c) łatwo spostrzec, że dołączając do w_1, w_2 wektory $e_1 = (1, 0, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0, 0)$ otrzymamy układ liniowo niezależny złożony z 4 wektorów przestrzeni $\mathbb{R}^4$. Zatem układ e_1, e_2, w_1, w_2 musi tworzyć bazę $\mathbb{R}^4$.