

1 Kolokwium z algebry

29 października

1. Zadany jest układ równań z czterema niewiadomymi:

$$U_t : \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 1 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = t^2 \end{cases}$$

a) Określić zbiór wartości $t \in \mathbb{R}$, dla których układ powyższy jest niesprzeczny.

b) Sprawdzić, że dla $t = 2$ układ U_t jest niesprzeczny, znaleźć jego rozwiązanie ogólne, oraz zapisać zbiór jego rozwiązań jako podzbiór \mathbb{R}^4 .

2. Oznaczmy przez $v_1 = (1, 0, 1, -1)$, $v_2 = (2, 0, 2, -2)$, $v_3 = (1, 2, -1, -1)$, $v_4 = (1, -4, 5, -1)$ wektory przestrzeni \mathbb{R}^4 . Niech $V = \text{lin}(v_1, v_2, v_3, v_4)$.

a) Wybrać spośród wektorów v_1, v_2, v_3, v_4 bazę przestrzeni V

b) podać współrzędne wektorów v_1, v_2, v_3, v_4 w znalezionej w a) bazie

c) Podać układ równań liniowych jednorodnych opisujących V jako podzbiór $\mathbb{R}^4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$

3. Zadano w \mathbb{R}^4 podprzestrzeń W układem równań liniowych jednorodnych:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

a) Znaleźć pewną bazę przestrzeni W

b) określić dla jakich wartości $s \in \mathbb{R}$ podprzestrzeń W zawiera się w podprzestrzeni $Z_s \subset \mathbb{R}^4$ opisanej równaniem liniowym jednorodnym:

$$sx_1 + 2x_2 + x_4 = 0$$

c) Uzupełnić znaną w a) bazę podprzestrzeni W do bazy \mathbb{R}^4