Zadania domowe, seria 8

20 grudnia 2013

Zadanie 1. W $\mathbb{R}^3$ zadano bazę $\mathcal{A} = \{(1,-1,2),(2,-1,4),(1,-1,3)\}$ natomiast w $(\mathbb{R}^2)^*$ bazę $\mathcal{B} = \{h, g\}$, gdzie $h, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ są funkcjonałami liniowymi zadanymi przez $h((x_1,x_2)) = 7x_1 + 3x_2$, $g((x_1,x_2)) = 5x_1 + 2x_2$. Niech funkcjonał liniowy $f \in (\mathbb{R}^3)^*$ będzie zadany przez $f((x_1,x_2,x_3)) = 3x_1 - x_2 + 2x_3$. Ponadto określono przekształcenie liniowe $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ wzorem $\phi((x_1,x_2,x_3)) = (x_1 - x_2 + 4x_3, 2x_2 - x_3)$ oraz takie przekształcenie liniowe $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, że $M(\psi^*)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}^*} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \end{bmatrix}$

a)Podać wzory funkcjonałów liniowych składających się na bazę $\mathcal{A}^*$ oraz wektory przestrzeni $\mathbb{R}^2$ składające się na taką bazę $\mathcal{B}_*$, że $(\mathcal{B}_*)^* = \mathcal{B}$

b) Podać macierze funkcjonału f: $M(f)_{st}$, gdzie st oznacza bazę standardową w $\mathbb{R}^3$ oraz $M(f)_{\mathcal{A}}$. Podać współrzędne funkcjonału f w bazie $\mathcal{A}^*$ oraz w bazie st^*

c) niech $v = (3,5) \in \mathbb{R}^2$.Podać macierz funkcjonału $\widehat{v} \in (\mathbb{R}^2)^{**}$, w bazie $\mathcal{B}$, gdzie$\widehat{\ }$: $\mathbb{R}^2 \to (\mathbb{R}^2)^{**}$ oznacza izomorfizm kanoniczny.

d) Podać macierz $M(\phi^*)^{\mathcal{A}^*}_{\mathcal{B}}$ oraz wzór na ψ. Podać wzór $\phi^*(f)$.

e) Podać bazy jądra i obrazu przekształceń ϕ, ϕ^*, ψ, ψ^*.

Zadanie 2. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K.

a) Udowodnić, że jeśli $\sigma : V \to V$ jest pewną symetrią liniową, to również $\sigma^* : V^* \to V^*$ jest pewną symetrią liniową.

b) Niech $W \subset \mathbb{R}^3$ będzie podprzestrzenią opisaną równaniem $x_1 + x_2 - x_3 = 0$ zaś $U = lin((1,1,0))$. Sprawdzić, że $\mathbb{R}^3 = W \bigoplus U$. Niech $\mathcal{A} = \{(1,-1,2),(2,-1,4),(1,-1,3)\}$. Znaleźć $M(\sigma)^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}}$ oraz $M(\sigma^*)^{\mathcal{A}^*}_{\mathcal{A}^*}$, gdzie $\sigma : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jest symetrią względem W równolegle do U.

Proszę o oddanie rozwiązań do 3 stycznia 2014 roku.